ALGÈBRE COMMUTATIVE III

Exercice 1 (*Anneaux noethériens*) — Soit A un anneau noethérien.

1) Étant donné un idéal $\mathfrak{I}$ de A, démontrer qu'il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ de A tels que $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{I}$. En déduire que l'anneau A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux premiers *minimaux*. (*Indication pour la première question* : considérer l'ensemble des idéaux de A ne vérifiant pas cette propriété, vérifier qu'il possède un élément maximal s'il est non vide et obtenir une contradiction.)

2) Soit M un A-module. Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est dit *associé* à M s'il existe un élément x de M tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x) = \{a \in \mathrm{A} \mid ax = 0\}$. On note $\mathrm{Ass}_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ l'ensemble des idéaux premiers de A associés à M.

(i) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{Ass}_\mathrm{A}(\mathrm{M})$ est vide si et seulement si $\mathrm{M} = 0$. (*Indication* : si M est non nul, considérer un élément maximal de l'ensemble des idéaux de A de la forme $\mathrm{Ann}(x)$, $x \in \mathrm{M} - \{0\}$.)

(ii) Démontrer qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est associé à M si et seulement si l'idéal premier $\mathfrak{p}\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ de $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ est associé à $M_\mathfrak{p}$.

(iii) Démontrer que la réunion des idéaux premiers associés à M est précisément l'ensemble des éléments a de A tels que l'homothétie $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $x \mapsto ax$, ne soit pas injective.

(iv) Si M est de type fini, démontrer que l'intersection des idéaux premiers associés à M est précisément l'ensemble des éléments a de A tels que l'homothétie $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, $x \mapsto ax$, soit nilpotente (on pourra traiter d'abord la question 3...)

3) Démontrer que tout idéal premier minimal de A est associé au A-module A.

4) Soit M un A-module de type fini.

(i) Démontrer qu'il existe une suite $(0) = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \dots \subset \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$ de sous-A-modules de M telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i-1} \simeq \mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ avec $\mathfrak{p}_i \subset \mathrm{A}$ premier.

(ii) Démontrer que l'ensemble $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ contient tous les idéaux premiers associés de M. (*Indication* : étant donné $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{M})$, localiser la suite des M_i par rapport à $\mathfrak{p}$, en déduire $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ pour un certain i et conclure.)

Exercice 2 (*Intégralité*) — Soient A un anneau et B une A-algèbre. Un élément x de B est dit *entier* sur A s'il existe un polynôme *unitaire* $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$ tel que $\mathrm{P}(x) = 0$.

1) Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément x de B :

(i) x est entier sur A ;

(ii) la sous-A-algèbre de B engendrée par x est un A-module de type fini ;

(iii) il existe une sous-A-algèbre C de B contenant x qui est un A-module de type fini.

(*Indication* : pour établir l'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$, choisir des générateurs $t_1, \dots, t_n$ de C, observer qu'il existe des éléments $a_{ij} \in \mathrm{A}$, $1 \le i, j \le n$, tels que $xt_i = \sum_{1 \le j \le n} a_{ij} t_j$ et vérifier que, posant $\mathrm{M} = (a_{ji})$, x est une racine du polynôme $\det(\mathrm{TI}_n - \mathrm{M}) \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$.)

2) En utilisant la question précédente, démontrer les deux assertions suivantes.

– L'ensemble des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B.
– Soit A' la sous-A-algèbre de B constituée des éléments de B entiers sur A ; étant donnée une B-algèbre C, démontrer qu'un élément de C est entier sur A' si et seulement s'il est entier sur A.

3) Soit D un entier sans facteur carré et soit K le corps $\mathbb{Q}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2 - \mathrm{D})$. Démontrer que le sous-anneau de K formé des éléments entiers sur $\mathbb{Z}$ est

– $\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{\mathrm{D}}+1}{2}\right]$ si $\mathrm{D} \equiv 1 \bmod. 4$;
– $\mathbb{Z}[\sqrt{\mathrm{D}}]$ sinon.

(*Indication* : démontrer qu'un élément $a+b\sqrt{\mathrm{D}}$ de K, $a,b \in \mathbb{Q}$, est entier sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si $2a \in \mathbb{Z}$ et $a^2 - b^2\mathrm{D} = 0$; observer que ces conditions impliquent $2b \in \mathbb{Z}$ et discuter selon la parité de $b/2$.)

Exercice 3 (*Intégralité, suite*) — Soit $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un homomorphisme faisant de B une A-algèbre *entière*, c'est-à-dire telle que tous les éléments de B soit entier sur A.

1) Supposons que les anneaux A et B soient intègres et que l'homomorphisme φ soit injectif. Démontrer que A est un corps si et seulement si B est un corps.

2) Soient $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers de A tels que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. En utilisant la question précédente, démontrer que que la fibre de l'application ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ au-dessus du point $\mathfrak{q}$ est non vide si elle est non vide au-dessus du point $\mathfrak{p}$. En déduire que l'image de l'application ${}^a\varphi$ est une partie fermée de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

3) Supposons que l'homomorphisme φ soit en outre injectif. Démontrer que l'application ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est surjective. (*Indication* : quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, vérifier que l'anneau $\mathrm{B}_{\mathfrak{p}}$ est non nul ; en déduire que la fibre de l'application ${}^a\varphi$ au-dessus de tout idéal premier minimal de A est non vide et conclure à l'aide de la question précédente.)

Exercice 4 (*Anneaux noethériens*) — Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre de type fini et G un groupe fini opérant sur B par A-automorphismes. Démontrer les deux assertions suivantes :

(i) il existe des éléments G-invariants $b_1,\dots,b_n$ de B tels que tout élément G-invariant b de B s'écrive sous la forme $b = \mathrm{P}(b_1,\dots,b_n)$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]$;

(ii) il existe des polynômes $\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_m$ dans $\mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]$ tels que, pour tout polynôme $\mathrm{R} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]$,

$$(\mathrm{R}(b_1,\dots,b_n) = 0) \iff \mathrm{R} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]\mathrm{P}_1 + \dots + \mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]\mathrm{P}_m.$$

(*Indication* : commencer par vérifier que tout élément b de B est entier sur B^{G} (considérer le polynôme $\prod_{g\in\mathrm{G}}(\mathrm{T} - g(b))$) et en déduire qu'il existe une sous-A-algèbre de type fini B_0 de B^{G} telle que B soit un module de type fini sur B_0 ; justifier alors que B^{G} est un module de type fini sur B_0 et conclure.)