

ALGÈBRE COMMUTATIVE II

Exercice 1 (*Localisation des modules*) — Soient A un anneau, M un A -module et S une partie multiplicative de A .

- On voit tout $S^{-1}A$ -module comme un A -module grâce à l'homomorphisme canonique $A \rightarrow S^{-1}A$.
 (i) Supposons qu'il existe deux $S^{-1}A$ -modules M' et M'' ainsi que des applications A -linéaires $\lambda' : M \rightarrow M'$ et $\lambda'' : M \rightarrow M''$ tels que, pour tout $S^{-1}A$ -module N , les applications

$$\text{Hom}_{S^{-1}A}(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda'$$

et

$$\text{Hom}_{S^{-1}A}(M'', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda''$$

soient des bijections. Démontrer qu'il existe un et un seul isomorphisme de $S^{-1}A$ -modules $\varphi : M' \rightarrow M''$ tel que $\lambda'' = \varphi \circ \lambda'$.

- (ii) Démontrer qu'il existe un $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$ et une application A -linéaire $\lambda : M \rightarrow S^{-1}M$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout $S^{-1}A$ -module N , l'application

$$\text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), \quad u \mapsto u \circ \lambda$$

est une bijection. En vertu de la question précédente, le couple $(S^{-1}M, \lambda)$ est unique à un isomorphisme unique près.

- Soit N un sous-module de M . Vérifier que $S^{-1}N$ est un sous- $S^{-1}A$ -module de $S^{-1}M$ et démontrer que les $S^{-1}A$ -modules $S^{-1}M/S^{-1}N$ et $S^{-1}(M/N)$ sont canoniquement isomorphes.
- Supposons que M soit de type fini. Démontrer que $S^{-1}M = 0$ si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.
- Étant donné un idéal premier \mathfrak{p} de A , on pose $M_{\mathfrak{p}} = (A - \mathfrak{p})^{-1}M$. Démontrer que l'application canonique $M \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)} M_{\mathfrak{m}}$ est injective.

Exercice 2 — Soient A un anneau, I un ensemble et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A engendrant l'idéal unité. Soit également M un A -module.

- Étant donnés $i, j \in I$, justifier que l'homomorphisme canonique $M \rightarrow M[(f_i f_j)^{-1}]$ se factorise à travers l'homomorphisme canonique $M \rightarrow M[f_i^{-1}]$ (resp. $M \rightarrow M[f_j^{-1}]$) et induit un isomorphisme entre $M[(f_i f_j)^{-1}]$ et $M[f_i^{-1}][f_j^{-1}]$ (resp. entre $M[(f_i f_j)^{-1}]$ et $M[f_j^{-1}][f_i^{-1}]$).
- Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour tout élément $(m_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} M[f_i^{-1}]$:
 (i) il existe un élément m de M , uniquement déterminé, tel que $m_i = m/1$ dans $M[f_i^{-1}]$ pour tout $i \in I$;
 (ii) quels que soient $i, j \in I$, $m_i/1 = m_j/1$ dans $M[(f_i f_j)^{-1}]$.
- (*Interprétation géométrique.*) Supposons que A soit une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k . On désigne par $\text{Max}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et on rappelle que $A/\mathfrak{m} = k$ pour tout $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$ (cf. Fiche I, exercice 9) ; pour tout élément a de A , on note \tilde{a} l'application

$$\text{Max}(A) \rightarrow k, \quad \mathfrak{m} \mapsto \tilde{a}(\mathfrak{m}) = a \text{ mod } \mathfrak{m}.$$

Une fonction $f : \text{Max}(A) \rightarrow k$ est dite *régulière* si elle satisfait à la condition suivante : quel que soit le point x de $\text{Max}(A)$, il existe un voisinage ouvert U de x et des éléments a, b de A tels que la fonction \tilde{b} ne s'annule pas sur U et $\tilde{f}|_U = \tilde{a}/\tilde{b}$. Les fonctions régulières sur $\text{Max}(A)$ constituent manifestement un sous-anneau $\mathcal{R}(A)$ de l'anneau $k^{\text{Max}(A)}$ de toutes les fonctions sur $\text{Max}(A)$ à valeurs dans k .

Soit \mathfrak{N} le nilradical de A . Démontrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un isomorphisme de A/\mathfrak{N} sur $\mathfrak{R}(A)$. (*Indication* : on rappelle que toute k -algèbre de type fini est un anneau de Jacobson, cf. exercices 8 et 9 de la feuille I.)

Exercice 3 (*Autour du lemme de Nakayama*) — Soient A un anneau et M un A -module de type fini.

- Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout idéal \mathfrak{a} de A :
 - $M = \mathfrak{a}M$;
 - il existe un élément a de A tel que $aM = 0$ et $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$.
- Quel que soit l'idéal premier \mathfrak{p} de A , on désigne par $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps résiduel $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ (c'est-à-dire le corps des fractions de A/\mathfrak{p}) et on note $M(\mathfrak{p})$ le $\kappa(\mathfrak{p})$ -espace vectoriel $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$.
 - Justifier que $M(\mathfrak{p})$ est de dimension finie sur $\kappa(\mathfrak{p})$.
 - Une fonction réelle f sur un espace topologique X est dite *semi-continue supérieurement* si $f^{-1}(] - \infty, \lambda [)$ est ouvert pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application

$$\text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M(\mathfrak{p})$$

est semi-continue supérieurement. (*Indication* : utiliser le lemme de Nakayama ainsi que le point 3 de l'exercice précédent.)

- Démontrer que toute application A -linéaire surjective $u : M \rightarrow M$ est automatiquement un isomorphisme. (*Indication* : voir M comme un $A[T]$ -module et utiliser le point 1.)

Exercice 4 — Soit A un anneau.

- Étant donné un A -module L et deux sous- A -modules M, N de L , démontrer que M et N sont de type fini si $M + N$ et $M \cap N$ le sont.
- Un A -module M est dit de *présentation finie* s'il est isomorphe au conoyau d'une application A -linéaire $A^m \rightarrow A^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$.
 - Quel que soit l'idéal \mathfrak{a} de A , démontrer que le A -module A/\mathfrak{a} est de présentation finie si et seulement si \mathfrak{a} est de type fini.
 - Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Si M' et M'' sont de présentation finie, démontrer que M est de présentation finie.

Exercice 5 (*Module des différentielles*) — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Étant donné un B -module M , une A -dérivation de B dans M est une application A -linéaire $D : B \rightarrow M$ satisfaisant à la condition de Leibniz : pour tous $b, b' \in B$, $D(bb') = bD(b') + b'D(b)$.

- Vérifier que l'ensemble $\text{Der}_A(B, M)$ des A -dérivations de B dans M est un sous-module du B -module des applications A -linéaires de B dans M .
- Soient M, M' deux B -modules et soit $f : M \rightarrow M'$ une application B -linéaire. Vérifier que l'application $D \mapsto f \circ D$ induit une application B -linéaire de $\text{Der}_A(B, M)$ dans $\text{Der}_A(B, M')$.
- Démontrer qu'il existe un B -module $\Omega_{B/A}^1$ et une A -dérivation $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}^1$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout B -module M , l'application

$$\text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, M) \rightarrow \text{Der}_A(B, M), u \mapsto u \circ d_{B/A}$$

est une bijection. Vérifier que le couple $(\Omega_{B/A}^1, d_{B/A})$ est unique à un isomorphisme unique près. (*Indication* : définir $\Omega_{B/A}^1$ comme le B -module quotient du B -module libre de base B

$$\bigoplus_{b \in B} B e_b$$

par le sous-module engendré par les éléments $e_{b+b'} - e_b - e_{b'}$, $e_{bb'} - be_{b'} - b'e_b$ et $e_{ab} - ae_b$ ($a \in A, b, b' \in B$.)

Le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est appelé le *module des différentielles* de la A -algèbre B .

4. Soit S une partie multiplicative de B . Étant donné un $S^{-1}B$ -module M , démontrer que toute A -dérivation de B dans M se prolonge de manière unique en une A -dérivation de $S^{-1}B$ dans M et vérifier que l'application obtenue de $\text{Der}_A(B, M)$ dans $\text{Der}_A(S^{-1}B, M)$ est une bijection. En utilisant la question précédente et l'exercice 1, en déduire que les $S^{-1}B$ -module $S^{-1}\Omega_{B/A}^1$ et $\Omega_{S^{-1}B/A}^1$ sont canoniquement isomorphes.
5. Soit \mathfrak{J} un idéal de B , soit $C = B/\mathfrak{J}$ et soit $p : B \rightarrow C$ l'homomorphisme canonique.

(i) En utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe une et une seule application B -linéaire $\psi : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/A}^1$ telle que $\psi \circ d_{B/A} = d_{C/A} \circ p$ puis vérifier que ψ induit une application C -linéaire

$$\psi : \Omega_{B/A}^1/\mathfrak{J}\Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/A}^1.$$

(ii) Vérifier que l'application $d_{B/A} : \mathfrak{J} \rightarrow \Omega_{B/A}^1$ induit une application C -linéaire

$$\delta : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \Omega_{B/A}^1/\mathfrak{J}\Omega_{B/A}^1.$$

(iii) Démontrer que la suite de C -modules

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A}^1/\mathfrak{J}\Omega_{B/A}^1 \xrightarrow{\psi} \Omega_{C/A}^1 \longrightarrow 0$$

est exacte. (*Indication* : en utilisant le point 3, démontrer que la suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A}^1/\mathfrak{J}\Omega_{B/A}^1, M) \longrightarrow \text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, M),$$

déduite de la précédente par application du foncteur $\text{Hom}_C(\cdot, M)$, est exacte.)

6. Soit I un ensemble et soit $B = A[T_i]_{i \in I}$. Démontrer que $\Omega_{B/A}^1$ est le B -module libre de base $d_{B/A}(T_i)$, $i \in I$. (*Indication* : vérifier que, pour tout B -module M , l'application $\text{Der}_A(B, M) \rightarrow M^{(I)}$, $D \mapsto D(T_i)$ est une bijection et en déduire que l'homomorphisme canonique

$$\bigoplus_{i \in I} B d_{B/A}(T_i) \rightarrow \Omega_{B/A}^1$$

est un isomorphisme.)

7. Soit I un ensemble, soit \mathfrak{J} un idéal de l'anneau $B = A[T_i]_{i \in I}$ et soit $C = B/\mathfrak{J}$. Démontrer que $\Omega_{C/A}^1$ est le quotient du C -module libre de base $(d_{C/A}(T_i))_{i \in I}$ par le sous-module engendré par les éléments $\sum_{i \in I} \partial f / \partial T_i d_{C/A}(T_i)$, $f \in \mathfrak{J}$. (*Indication* : utiliser les points 4 et 5.)
8. Calculer $\Omega_{B/A}^1$ dans chacun des cas suivants : (i) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}[T_1, T_2]/(T_2^2 - T_1^3 - T_1)$, (ii) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}[T_1, T_2]/(T_1^2 - T_2^3)$, (iii) $A = \mathbb{F}_2$ et $B = \mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2 + 1)$.

Exercice 6 (Modules projectifs, injectifs) — Soit A un anneau.

- Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un A -module M .
 - Le foncteur $\text{Hom}_A(M, \cdot)$ est exact.
 - Quelle que soit la suite exacte de A -modules $N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$, toute application A -linéaire $u : M \rightarrow N''$ se relève en une application A -linéaire de M dans N .
 Un A -module est dit *projectif* s'il satisfait à ces deux conditions.
- Démontrer qu'un A -module est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un A -module libre.
- Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout A -module M de type fini :
 - M est projectif.
 - Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$ est libre.
 - Il existe des éléments f_1, \dots, f_n de A engendrant l'idéal unité tels que $M[f_i^{-1}]$ soit un $A[f_i^{-1}]$ -module libre pour tout i .

4. Démontrer que tout A-module M est quotient d'un A-module projectif. En déduire qu'il existe une *résolution projective* de M, c'est-à-dire une suite exacte de A-modules

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_n} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

dans laquelle chaque P_n est un A-module projectif.

5. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout A-module M :

(i) le foncteur $\text{Hom}_A(\cdot, M)$ est exact ;

(ii) quelle que soit la suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$, toute application A-linéaire $N' \rightarrow M$ se prolonge en une application A-linéaire de N dans M.

Un A-module est dit *injectif* s'il satisfait à ces deux conditions.

6. Supposons que l'anneau A soit intègre.

(i) Démontrer que tout A-module injectif est *divisible*, c'est-à-dire que la multiplication $M \xrightarrow{a} M$ est surjective pour tout élément non nul a de A.

(ii) Si l'anneau A est principal, démontrer qu'un A-module est injectif si et seulement s'il est divisible.

(iii) Vérifier que le \mathbb{Z} -module \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif et en déduire que tout \mathbb{Z} -module M admet une application linéaire non nulle dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Remarque : l'énoncé dual de la question 4 est vrai : tout A-module M s'injecte dans un A-module injectif et possède donc une résolution injective $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow I^n \xrightarrow{d^n} \cdots$ mais la démonstration est plus compliquée... ⁽¹⁾

⁽¹⁾Voir par exemple Serge Lang, *Algebra* (third edition), Addison Wesley Pub. (1999), XX.§4.
