Université Claude Bernard – Lyon 1 et École Normale Supérieure de Lyon
Année 2007/2008
Unité d'enseignement : algèbre approfondie
Examen partiel du 16 novembre 2007
Enseignant responsable : Bertrand RÉMY

Corrigé

Exercice A. 1) Il y a cinq classes de conjugaisons dans $\mathcal{S}_4$: la classe de 1 (un élément), la classe des transpositions (6 éléments), la classe des produits de deux transpositions de support disjoints (3 éléments), la classe des 3-cycles (8 éléments) et la classe des 4-cycles (6 éléments).

2) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ en paires d'entiers. Le groupe $\mathcal{S}_4$ opère naturellement par permutations sur $\mathcal{P}$ via $\sigma\big(\{\{a,b\},\{c,d\}\}\big) = \{\{\sigma(a),\sigma(b)\},\{\sigma(c),\sigma(d)\}\}$; on définit ainsi un homomorphisme de groupes $\varphi : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}(\mathcal{P})$ qui est manifestement surjectif. Les éléments de $\mathcal{S}_4$ préservant la partition $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \in \mathcal{P}$ sont les huit permutations 1, $(1,2)$, $(3,4)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$, $(1,3,2,4)$ et $(1,4,2,3)$; parmi celles-ci, seules 1, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$ et $(1,4)(2,3)$ préservent toutes les partitions de $\{1,2,3,4\}$ en paires d'entiers. Comme $(1,2)(3,4)(1,3)(2,4) = (1,4)(2,3)$, le noyau de φ est l'image de l'homomorphisme

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathcal{S}_4, \quad (u,v) \mapsto [(1,2)(3,4^{)}]^u[(1,3)(2,4)]^v = (1,2)^u(3,4)^u(1,3)^v(2,4)^v$$

et est donc isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

3) Toute représentation linéaire complexe $\rho : \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(V)$ donne naturellement lieu à une représentation linéaire complexe $\rho \circ \varphi$ du groupe $\mathcal{S}_4$ et ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \varphi$ est irréductible.

À isomorphisme près, on sait qu'il existe trois représentations complexes irréductibles de $\mathcal{S}_3$: la représentation triviale 1, la signature ε_2 et la représentation ρ_2 de degré 2, obtenue en faisant agir $\mathcal{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3$ par permutation des coordonnées puis en considérant le plan d'équation $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Les caractères de ces trois représentations sont donnés par la table suivante :

	1	ε_2	ρ_2
1	1	1	2
t	1	-1	0
c	1	1	-1

dans laquelle t (resp. c_3) désigne la classe de conjugaison des transpositions (resp. des 3-cycles) dans $\mathcal{S}_3$. Pour en déduire les caractères des trois représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ correspondantes, il suffit d'observer que φ envoie une transposition (resp. un 4-cycle) sur une transposition et qu'elle envoie un 3-cycle sur un 3-cycle ; on obtient :

	1	$\varepsilon_2 \circ \varphi$	$\rho_2 \circ \varphi$
1	1	1	2
t	1	-1	0
tt'	1	1	2
c_3	1	1	-1
c_4	1	-1	0

où t, tt', c_3 et c_4 désignent respectivement les classes de conjugaison des transpositions, des produits de deux transpositions de supports disjoints, des 3-cycles et des 4-cycles dans $\mathcal{S}_4$. La représentation $\varepsilon_2 \circ \varphi$ est manifestement la signature ε_3.

4) Le groupe $\mathcal{S}_4$ ayant cinq classes de conjugaisons, il admet cinq représentations complexes irréductibles distinctes à isomorphisme près. Désignant par $n_1, \ldots, n_5$ les degrés respectifs de ces représentations,

$$24 = |\mathcal{S}_4| = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$$

et donc

$$n_4^2 + n_5^2 = 24 - (1 + 1 + 4) = 18$$

en tenant compte des trois représentations déjà connues. Les deux dernières représentations sont par conséquent de degré 3.

5) On obtient naturellement une représentation ρ_3 de degré 3 du groupe $\mathcal{S}_4$ en le faisant opérer sur $\mathbb{C}^4$ par permutation des coordonnées puis en considérant l'hyperplan d'équation $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. On peut vérifier qu'il s'agit d'une représentation irréductible en explicitant son caractère χ : $\chi(1) = 3$, $\chi(t) = 1$, $\chi(tt') = -1$, $\chi(c_3) = 0$ et $\chi(c_4) = -1$, puis en calculant le carré de sa norme

$$||\chi||^2 = \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}\chi(\sigma)^2 = \frac{1}{24}(\chi(1)^2 + 6\chi(t)^2 + 3\chi(tt')^2 + 8\chi(c_3)^2 + 6\chi(c_4)^2) = 1$$

dans l'espace des fonctions centrales sur $\mathcal{S}_4$.

La représentation $\rho_3 \otimes \varepsilon_3$ est également irréductible car

$$||\chi_{\rho\otimes\varepsilon_3}||^2 = \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}(\chi(\sigma)\varepsilon_3(\sigma))^2 = \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_4}\chi(\sigma)^2 = ||\chi||^2 = 1.$$

5) Voici finalement la table des caractères de $\mathcal{S}_4$:

	1	ε_3	$\rho_2\circ\varphi$	ρ_3	$\rho_3\otimes\varepsilon_3$
1	1	1	2	3	3
t	1	-1	0	1	-1
tt'	1	1	2	-1	-1
c_3	1	1	-1	0	0
c_4	1	-1	0	-1	1

Exercice B. 1) 1.1. Par définition de l'automorphisme φ,

$$\varphi(T_1^{\nu_1}\dots T_n^{\nu_n}) = T_1^{\nu_1+r^2\nu_2+\ldots+r^n\nu_n} + \sum_{0\le p<\nu_1+r^2\nu_2+\ldots+r^n\nu_n} Q_{p,\nu}(T_2,\dots,T_n)T_1^p$$

pour tout multi-indice $\nu \in \mathbb{N}^n$. Vu la définition de r, les entiers $\nu_1+r^2\nu_2+\ldots+r^n\nu_n$ et $\nu_1'+r^2\nu_2'+\ldots+r^n\nu_n'$ associés à deux multi-indices $\nu,\nu' \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_\nu, a_{\nu'} \neq 0$ sont *distincts* ; il existe en particulier un unique multi-indice $\mu \in \mathbb{N}^n$ tel que $a_\mu \neq 0$ et

$$\mu_1 + r^2\mu_2 + \ldots + r^n\mu_n = \max\{\nu_1 + r^2\nu_2 + \ldots + r^n\nu_n \mid \nu \in \mathbb{N}^n \text{ et } a_\nu \neq 0\} \geq 1.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu\varphi(T_1^{\nu_1}\dots T_n^{\nu_n}) \\
&= \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu(T_1^{\nu_1+r^2\nu_2+\ldots+r^n\nu_n} + \sum_{0\le p<\nu_1+r^2\nu_2+\ldots+r^n\nu_n} Q_{p,\nu}(T_2,\dots,T_n)T_1^p) \\
&= \alpha T_1^N + \sum_{p=0}^{N-1} Q_p(T_2,\dots,T_n)T_1^p
\end{aligned}$$

avec $N = \mu_1 + r^2\mu_2 + \ldots + r^n\mu_n$ et $\alpha = a_\mu \in k^\times$.

1.2. Si l'on applique l'automorphisme φ^{-1} à l'identité $\alpha T_1^N + \sum_{p=0}^{N-1} Q_p(T_2,\dots,T_n)T_1^p - \varphi(f) = 0$, on obtient l'identité

$$\alpha T_1^N + \sum_{p=0}^{N-1} Q_p(\varphi^{-1}(T_2),\dots,\varphi^{-1}(T_n))T_1^p - f = 0,$$

laquelle montre T_1 est entier sur la sous-k-algèbre de $k[T_1,\dots,T_n]$ engendrée par les polynômes f et $x_2 = \varphi^{-1}(T_2),\dots,x_n = \varphi^{-1}(T_n)$. Il est clair que les n éléments $\varphi(f)$, $T_2,\dots,T_{n-1}$ et T_n de $k[T_1,\dots,T_n]$ sont algébriquement indépendants : étant donné un polynôme $R \in k[Y_1,\dots,Y_n]$ écrit sous la forme $R = \sum_{i=0}^d S_i(T_2,\dots,T_n)T_1^i$,

$$R(\varphi(f),T_2,\dots,T_n) = \alpha^d T_1^{Nd} + \sum_{j=0}^{Nd-1} S_j'(T_2,\dots,T_n)T_1^j$$

et donc $R = Q_d = \ldots = Q_0 = 0$ si $R(\varphi(f), T_2, \ldots, T_n) = 0$. Il suffit d'appliquer l'automorphisme φ^{-1} pour en déduire que les n éléments $f, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et x_n de $k[T_1, \ldots, T_n]$ sont algébriquement indépendants.

1.3. Les images de $T_2, \ldots, T_n$ dans $k[T_1, \ldots, T_n]/(\varphi(f))$ sont algébriquement indépendantes : il existerait sinon des polynômes non nuls $R \in k[T_2, \ldots, T_n]$ et $Q \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tels que $R(T_2, \ldots, T_n) = \varphi(f)Q(T_1, \ldots, T_n)$, ce qui clairement impossible si l'on considère les degrés de ces polynômes dans l'anneau $k(T_2, \ldots, T_n)[T_1]$.

2) Soit A une k-algèbre de type fini non nulle et soit $\pi : k[T_1, \ldots, T_n] \to A$ un k-homomorphisme surjectif, de noyau $\mathfrak{a} \neq k[T_1, \ldots, T_n]$. Nous allons prouver, en raisonnant par récurrence sur $n \geq 1$, qu'il existe un ensemble fini I et un k-homomorphisme injectif $\iota : k[(Y_i)_{i \in I}] \to A$ faisant de A un anneau entier sur $k[(Y_i)_{i \in I}]$.

- Cas $n = 1$. De deux choses l'une : si $\mathfrak{a} = 0$, il suffit de poser $I = \{1\}$ et $\iota(Y_1) = \pi(T_1)$; si $\mathfrak{a} \neq 0$, un polynôme non constant dans $\mathfrak{a}$ fournit une relation de dépendance intégrale pour $\pi(T_1)$ sur k et l'anneau A est donc entier sur k, ce qui correspond au cas $I = \emptyset$.
- Supposons le résultat acquis pour $n-1 \geq 0$. Si $\mathfrak{a} = 0$, il suffit de poser $I = \{1, \ldots, n\}$ et $\iota(Y_i) = \pi(T_i)$ pour tout $i \in I$. Sinon, l'idéal $\mathfrak{a}$ contient un polynôme non constant f ; d'après la première question, il existe des éléments $x_2, \ldots, x_n$ de $k[T_1, \ldots, T_n]$ tels que $f, x_2, \ldots, x_n$ soient algébriquement indépendants sur k et tels que l'anneau $k[T_1, \ldots, T_n]$ soit entier sur $k[f, x_2, \ldots, x_n]$; l'anneau $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ est alors entier sur l'anneau $A' = k[x_2, \ldots, x_n]/(\mathfrak{a} \cap k[x_2, \ldots, x_n])$ et l'homomorphisme π induit donc un homomorphisme injectif $\pi' : A' \to A$ faisant de A un anneau entier sur A'. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un ensemble fini I et un k-homomorphisme injectif $\iota' : k[Y_{i \in I}] \to A'$ tels que l'anneau A' soit entier sur $k[(Y_i)_{i \in I}]$; l'anneau A est alors entier sur $k[(Y_i)_{i \in I}]$ via l'homomorphisme injectif $\iota = \pi' \circ \iota'$.

Exercice C. *Observation préliminaire : étant données deux extensions* $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$ *et* $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P' \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$ *de M par N, tout A-homomorphisme $\varphi : P \to P'$ est automatiquement un isomorphisme en vertu du lemme des cinq.*

1) En vertu de la commutativité du diagramme considéré, l'application A-linéaire

$$P' \oplus N \to P'' \oplus M, \quad (x, y) \mapsto (w(x) + \gamma(y), \beta(x))$$

est à valeurs dans le sous-A-module v^*P'' et elle s'annule identiquement sur l'image de l'homomorphisme $N' \to P' \oplus N,\ z \mapsto (\alpha(z), -u(z))$; elle définit donc une application A-linéaire $\varphi : u_*P' \to v^*P''$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, equal] & u_*P' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\gamma''"'] & v^*P'' \arrow[r, "\delta''"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif car, quels que soient $x \in P'$ et $y \in N$,

$$\varphi \circ \alpha'(y) = \varphi(0, y) = (\gamma(y), 0) = \gamma''(y)$$

et

$$\delta'' \circ \varphi(x, y) = \delta''(w(x) + \gamma(y), \beta(x)) = \beta(x) = \beta'(x, y).$$

Vu l'observation prélimiaire, cela établit que les deux extensions u_*E' et v^*E'' sont équivalentes.

2) Il suffit de considérer le A-module libre de base M

$$L = \bigoplus_{m \in M} Ae_m$$

ainsi que l'application A-linéaire $\pi : L \to M$ définie par $\pi(e_m) = m$ pour tout $m \in M$; il s'agit manifestement d'une surjection.

3) 3.1. Étant donnée une extension

$$E \ : \ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

l'application $p : L \to M$ se relève en une application A-linéaire $u' : L \to P$ car le A-module L est libre ; on a alors $\beta \circ u' \circ \iota = p \circ \iota = 0$, ce qui signifie que l'application $u = u' \circ \iota$ est à valeurs dans N, et l'on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"'] & P \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En vertu de la question 1, les extensions $E = \mathrm{id}_M{}^* E$ et $u_* E_0$ sont équivalentes et l'application

$$\mathrm{Hom}_A(R, N) \to \mathrm{Ext}(M, N), \quad u \mapsto u_* E_0$$

est par conséquent *surjective*.

Étant données des applications A-linéaires $u \in \mathrm{Hom}_A(R, N)$ et $w \in \mathrm{Hom}_A(L, N)$, la composée de l'application $R \to L \oplus N,\ z \mapsto (\iota(z), -u(z))$ par l'application

$$L \oplus N \to L \oplus N, \quad (x, y) \mapsto (x, y - w(x))$$

est l'application $R \to L \oplus N,\ z \mapsto (\iota(z), -(u + w \circ \iota)(z))$, associée à l'élément $u + w \circ \iota$ de $\mathrm{Hom}_A(R, N)$. Les extensions $u_* E_0$ et $(u + w \circ \iota)_* E_0$ sont par conséquent équivalentes.

Soient enfin $u, v \in \mathrm{Hom}_A(R, N)$ deux applications A-linéaires telles que les extensions $u_* E_0$ et $v_* E_0$ soient équivalentes. Désignant par $u' : L \to u_* L$ et $v' : L \to v_* L$ les applications A-linéaires canoniques, on dispose par hypothèse d'un isomorphisme de A-modules $\varphi : u_* L \to v_* L$ s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & u_* L \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"'] & v_* L \arrow[r, "p'"'] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Les deux homomorphismes v' et $\varphi \circ u'$ de L dans $v_* L$ vérifiant

$$p' \circ v' = p' \circ (\varphi \circ u') = p' \circ u' = p,$$

il existe une application A-linéaire $w \in \mathrm{Hom}_A(L, N)$ telle $\varphi \circ u' = v' + \iota' \circ w$; comme $(\varphi \circ u') \circ \iota = \varphi \circ (\iota' \circ u) = \iota' \circ u$, on en déduit l'identité

$$\iota' \circ u = v' \circ \iota + \iota' \circ w \circ \iota = \iota' \circ v + \iota' \circ w \circ \iota$$

et donc

$$u = v + w \circ \iota$$

en vertu de l'injectivité de ι'.

Au terme de cette discussion, nous avons établi que l'application $\iota_* : \mathrm{Hom}_A(R, N) \to \mathrm{Ext}(M, N),\ u \mapsto u_* E_0$ réalise une bijection entre $\mathrm{Hom}_A(R, N) / \mathrm{Hom}_A(L, N)$ et $\mathrm{Ext}(M, N)$.

3.2. L'application $p' : L \to N \oplus M,\ x \mapsto (0, p(x))$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "0"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \oplus M \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et l'extension $0_* E_0$ est donc équivalente à l'extension triviale.

3.3. On dispose par hypothèse de deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] & u_* L \arrow[r, "p'"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u'"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] & u'_* L \arrow[r, "p'"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Puisque $p' \circ \varphi = p' \circ \psi = p$, l'application A-linéaire $\varphi \oplus \psi \oplus p : L \to u_* L \oplus u'_* L \oplus M$ est à valeurs dans le sous-module $\Delta^*(u_* L \oplus u'_* L)$ et elle s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u \oplus u'"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \oplus N \arrow[r, "\iota' \oplus \iota'"] & \Delta^*(u_* L \oplus u'_* L) \arrow[r, "p''"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u \oplus u'"] & L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \oplus N \arrow[r, "\iota' \oplus \iota'"] \arrow[d, "\nabla"] & \Delta^*(u_* L \oplus u'_* L) \arrow[r, "p''"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota''"] & \nabla_* \Delta^*(u_* L \oplus u'_* L) \arrow[r, "p''"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif car ses parties supérieure et inférieure le sont ; puisque $\nabla \circ (u \oplus u') = u + u'$, nous en déduisons que les extensions $\nabla_* \Delta^*(u_* E_0 \oplus u'_* E_0)$ et $(u + u')_* E_0$ sont équivalentes.

3.4. L'application

$$\mu : \mathrm{Ext}(M, N) \times \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M, N), \quad (E, E') \mapsto \nabla_* \Delta^*(E \oplus E')$$

s'identifie, via la bijection ι_* de 3.1, à l'addition dans le groupe abélien $\mathrm{Hom}_A(R, N)/\mathrm{Hom}_A(L, N)$; comme $\iota_*(0)$ est la classe de l'extension triviale, cela prouve que μ définit sur $\mathrm{Ext}(M, N)$ une structure de groupe abélien dont l'élément neutre est la classe de l'extension triviale.

Quels que soient $a \in A$ et $u \in \mathrm{Hom}_A(R, N)$, $au = (a\mathrm{id}_N) \circ u$ et donc $(au)_* E_0 = (a\mathrm{id}_N)_*(u_* E_0)$; en vertu de la question 3.1, il en découle que l'application $A \times \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M, N)$, $(a, E) \mapsto (a\mathrm{id}_N)_* E$ munit $\mathrm{Ext}(M, N)$ d'une structure de A-module.

En conclusion, nous avons établi qu'il existe une unique structure de A-module sur l'ensemble $\mathrm{Ext}(M, N)$ telle que, pour toute suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

avec L libre, l'application $\mathrm{Hom}_A(R, N)/\mathrm{Hom}_A(L, N) \to \mathrm{Ext}(M, N)$ définie à la question 3.1 réalise un isomorphisme de A-modules.

4) Soit $E_0 \ : \ 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules avec L libre. Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(L, .)$ est exact et l'on dispose ainsi d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, N') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(M, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(M, N'') \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(L, N') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(L, N'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(R, N') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(R, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(R, N'') &
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes et les lignes sont exactes. En appliquant le lemme du serpent, nous en déduisons une suite exacte longue de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, N') \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(M, N) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(M, N'') \arrow[d, "\partial"] \\
\mathrm{Hom}_A(R, N'')/\mathrm{Hom}_A(L, N'') & \mathrm{Hom}_A(R, N)/\mathrm{Hom}_A(L, N) \arrow[l, "g_*"'] & & \mathrm{Hom}_A(R, N')/\mathrm{Hom}_A(L, N') \arrow[ll, "f_*"']
\end{tikzcd}$$

dans laquelle ∂ est l'homomorphisme envoyant $u \in \mathrm{Hom}_A(M, N'')$ sur la classe de $u'_{|R}$, où $u' \in \mathrm{Hom}_A(L, N)$ est un relèvement quelconque de l'homomorphisme $u \circ p : L \to N''$.

4.1. Étant donné un homomorphisme $u \in \mathrm{Hom}_A(M, N'')$, choisissons un relèvement $u' \in \mathrm{Hom}_A(L, N)$ de $u \circ p$ et posons $v = u'_{|R} \in \mathrm{Hom}_A(R, N')$. Vu le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

les extensions u^*E_0 et v_*E_0 sont équivalentes en vertu de la question 1 et cela signifie précisément que les applications δ et ∂ se correspondent via l'isomorphisme de A-modules $\mathrm{Hom}_A(R, N')/\mathrm{Hom}_A(L, N') \tilde{\to} \mathrm{Ext}(M, N')$ construit à la question 3. Il en découle en particulier que l'application δ est A-linéaire.

4.2. Quelles que soient les applications $u \in \mathrm{Hom}_A(R, N')$ et $u' \in \mathrm{Hom}_A(R, N)$, $(f \circ u)_*E_0 = f_*(u_*E_0)$ et $(g \circ u')_*E_0 = g_*(u'_*E_0)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_A(R, N'') & \xleftarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_A(R, N) & \xleftarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_A(R, N') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}(M, N'') & \xleftarrow{g_*} & \mathrm{Ext}(M, N) & \xleftarrow{f_*} & \mathrm{Ext}(M, N'), \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les homomorphismes construits à la question 3, est donc commutatif et, vu la question précédente, la suite de A-modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M, N') & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_A(M, N) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Hom}_A(M, N'') \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ & & \mathrm{Ext}(M, N'') & \xleftarrow{g_*} & \mathrm{Ext}(M, N) & \xleftarrow{f_*} & \mathrm{Ext}(M, N') \end{array}$$

est par conséquent exacte.

4.3. Lorsque l'anneau A est *principal*, le A-module R est libre — car tout sous-A-module d'un A-module libre est libre — et le foncteur $\mathrm{Hom}_A(R, .)$ est donc exact. Il en découle que l'application g_* : $\mathrm{Hom}_A(R, N) \to \mathrm{Hom}_A(R, N'')$ est surjective et il en est par conséquent de même de l'application g_* : $\mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M, N'')$.