REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS I

Exercice 1 — Soit G un groupe fini et soit k un corps (commutatif). Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute suite exacte de $k[\mathrm{G}]$-modules $0 \longrightarrow \mathrm{V}' \longrightarrow \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}'' \longrightarrow 0$, la suite de k-espaces vectoriels $0 \longrightarrow \mathrm{V}'^{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{V}^{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{V}''^{\mathrm{G}} \longrightarrow 0$ est exacte ;

(ii) pour toute suite exacte de $k[\mathrm{G}]$-modules $0 \longrightarrow \mathrm{V}' \longrightarrow \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}'' \longrightarrow 0$ et tout $k[\mathrm{G}]$-module W, la suite de k-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}'', \mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}', \mathrm{W}) \longrightarrow 0$$

est exacte ;

(iii) le cardinal de G est premier à la caractéristique de k.

À partir de maintenant, toutes les représentations d'un groupe fini G que l'on considère sont *complexes* et on écrit « G-module » en lieu et place de « $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$-module ».

Exercice 2 (*Généralités*) — Soit G un groupe fini et soit V un G-module.

1) Soit $\mathrm{D}(\mathrm{G})$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in \mathrm{G}$. Démontrer que le G-module $\mathrm{V}^{\mathrm{D}(\mathrm{G})}$ est une somme de G-modules de dimension un.

2) Supposons que le groupe G soit non commutatif, simple et qu'il possède un élément d'ordre 2. Démontrer que, s'il n'est pas trivial, le G-module V est de degré supérieur ou égal à 3. (*Indication : vérifier que* G *s'injecte dans* $\mathrm{SL}(\mathrm{V})$ *et étudier l'action d'un élément de* G *d'ordre* 2.)

3) Étant donné un homomorphisme $\varepsilon : \mathrm{G} \to \mathbb{C}^{\times}$, on désigne par $\mathrm{V}(\varepsilon)$ le G-module « tordu par ε », obtenu en faisant opérer G sur V via $g.x = \varepsilon(g)(g.x)$. Démontrer que $\mathrm{V}(\varepsilon)$ est irréductible si et seulement si V l'est.

Exercice 3 (*Décomposition d'une représentation*) — Soient G un groupe fini et V un G-module.

1) Étant donné un G-module irréductible W, démontrer que l'application

$$\mathrm{V} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{W}), \quad x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$$

est surjective et que l'application $\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}, \mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ induite par l'homomorphisme

$$\mathrm{W} \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W}, \mathrm{V}) \to \mathrm{V}, \ (x, \varphi) \mapsto \varphi(x)$$

est injective. Quel est le noyau (resp. l'image) de la première application (resp. de la seconde) ?

2) Soit H un autre groupe fini et soit U un H-module ; le groupe $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ opère naturellement sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ par $(g, h).u = h \circ u \circ g^{-1}$. Si V et U sont irréductibles, démontrer que le $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ est irréductible. (*Indication : considérer un sous-module* F *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ *et vérifier que l'injection canonique* $\mathrm{F} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ *est un isomorphisme en utilisant la question précédente.*)

3) Soient $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_d$ les composantes isotypiques distinctes de V. Démontrer que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est canoniquement isomorphe au produit des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathrm{End}(\mathrm{V}_i)$ et en déduire que V est irréductible si et seulement si $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) \simeq \mathbb{C}$.

4) Sans utiliser la théorie des caractères, démontrer que tout G-module irréductible W est de multiplicité $\dim(\mathrm{W})$ dans la représentation régulière $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$. En déduire qu'il n'y a qu'un nombre fini h de classes d'isomorphie de G-modules irréductibles, puis que, pour tous G-modules irréductibles $\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_h$ deux à deux non isomorphes, les applications canoniques $\mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W}_i)$ induisent un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathbb{C}[\mathrm{G}] \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{h} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W}_i).$$

5) Déduire de la question précédente l'identité

$$|\mathrm{G}| = \sum_{i=1}^{h} (\dim \mathrm{W}_i)^2$$

et le fait que le nombre h de classes d'isomorphie de G-modules irréductibles est le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G.

6) Soit $g \in \mathrm{G}$, $g \neq 1$. Démontrer qu'il existe une représentation irréductible V de G sur laquelle g opère non trivialement.

Exercice 4 (*Groupe quaternionien*) — Vérifier que le groupe

$$\mathbb{H}_8 = \mathrm{SU}(2, \mathbb{Z}[i]) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}[i]) \mid \mathrm{M}^t\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{I}_2 \text{ et } \det(\mathrm{M}) = 1\}$$

admet la présentation

$$\langle a, b \,|a^2 = b^2,\ a^4 = 1,\ ba = a^{-1}b\rangle$$

puis déterminer toutes ses représentations irréductibles. (*Indication : vérifier que le quotient de* $\mathbb{H}_8$ *par son centre est un groupe abélien d'ordre* 4.)

Exercice 5 (*Groupes symétriques*) — Quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère naturellement sur $\mathbb{C}^n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{C})$ par : $\sigma.(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$.

On suppose $n \geq 3$ dans ce qui suit.

1) Soit $\mathbf{S}_n$ le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle. Démontrer que $\mathbf{S}_n$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ (*représentation standard*).

2) Déterminer toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

3) Soit $\varepsilon_n : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ la signature. Démontrer que le $\mathfrak{S}_n$-module tordu $\mathrm{S}_n(\varepsilon_n)$ (cf. exercice 2 pour la définition) est isomorphe à S_n si et seulement si $n = 3$.

4) Vérifier qu'une permutation de $\mathbb{F}_2^2$ est un automorphisme $\mathbb{F}_2$-linéaire si et seulement si elle fixe l'origine $0 = (0, 0)$ et en déduire un homomorphisme de groupes surjectif

$$\mathfrak{S}(\mathbb{F}_2^2) \to \mathfrak{S}(\mathbb{F}_2^2 - \{0\}),\ \sigma \mapsto (x \mapsto \sigma(x) - \sigma(0))$$

dont le noyau est le sous-groupe d'ordre 4 formé des permutations de $\mathbb{F}_2^2$ définies par les translations.

Décrire en termes de cycles le sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$ que l'on vient de mettre en évidence puis déterminer toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 6 (*Représentations de permutation*) — Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{V} = \bigoplus_{x \in \mathrm{X}} \mathbb{C}e_x$ dont on fait un G-module en posant $ge_x = e_{gx}$.

1) Vérifier que la multiplicité de la représentation unité (= triviale) dans V est le nombre d'orbites de G dans X.

2) Soit V_0 le noyau de l'augmentation $\mathrm{V} \to \mathbb{C}$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le G-module V_0 est irréductible ;

(ii) il y a deux orbites pour l'action naturelle de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$;

(iii) le groupe G opère transitivement sur X et doublement transitivement sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$: étant donnés $x, y, x', y' \in \mathrm{X}$ avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $x' = gx$ et $y' = gy$.

(*Indication : l'équivalence des assertions (ii) et (iii) est facile ; pour établir l'équivalence des assertions (i) et (ii), vérifier tout d'abord que l'irréductibilité de* V_0 *implique la transitivité de* G *sur* X, *en déduire que la* $\mathbb{C}$*-algèbre* $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ *est isomorphe à* $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_0) \times \mathbb{C}$ *et utiliser le fait que* V_0 *est irréductible si et seulement si* $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_0)$ *est de dimension un.*)

3) Déduire de ce qui précède que la représentation standard $\mathbf{S}_n$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (cf. exercice 4) est irréductible.