Valeurs propres - Espaces propres - Polynôme caractéristique
Diagonalisation - Trigonalisation

Exercice 10.* Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$.

1. Si $\dim \mathrm{E} = 1$, il est toujours vrai que $\mathrm{tr}(u)$ est une valeur propre de u car $u = \mathrm{tr}(u)\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Supposons $\dim \mathrm{E} \geq 2$ et soit $\mathrm{P}_u = \det(\mathrm{T}\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - u) \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ le polynôme caractéristique de u. Comme $\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{E} - 1 \geq 1$, 0 est une valeur propre de u et 0 est une racine de P_u de multiplicité supérieure ou égale à $\dim \mathrm{E} - 1$; on peut donc factoriser P_u sous la forme $\mathrm{P}_u = \mathrm{T}^{\dim \mathrm{E}-1}(\mathrm{T} - \lambda)$ dans $\mathrm{K}[\mathrm{T}]$ et la conclusion vient de ce que $\mathrm{tr}(u)$ est le coefficient de $-\mathrm{T}^{\dim \mathrm{E}-1}$ dans P_u.

2. Si $\dim \mathrm{E} = 1$, tous les endomorphismes sont diagonalisables et la condition $\mathrm{tr}(u) \neq 0$ est automatiquement vérifiée puisque $u \neq 0$ ($\mathrm{rg}(u) = 1$).

Supposons $\dim \mathrm{E} \geq 2$. Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(u)$, est par hypothèse de dimension $\dim \mathrm{E} - 1$. Si u est diagonalisable, E est la somme des sous-espaces propres de u et il doit donc exister une valeur propre non nulle puisque $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathrm{E}$; réciproquement, si $\lambda = \mathrm{tr}(u) \neq 0$, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \{0\}$ et donc

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$$

puisque $\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \geq (\dim \mathrm{E} - 1) + 1 = \dim \mathrm{E}$, ce qui prouve que l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 11.* Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On définit le *commutant* de u comme l'ensemble Com_u des endomorphismes de E qui commutent avec u.

1. Le commutant de u est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$: il contient en effet l'endomorphisme nul et

$$(\lambda v + \mu w) \circ u = \lambda(v \circ u) + \mu(w \circ u) = \lambda(u \circ v) + \mu(u \circ w) = u \circ (\lambda v + \mu w)$$

pour tous $v, w \in \mathrm{Com}_u$, $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$.

2. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

2.1 Tout endomorphisme v de E commutant avec u stablise chacun des sous-espaces propres de u : quels que soient en effet la valeur propre λ de u et le vecteur $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id})$,

$$u(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

et $v(x)$ appartient donc à $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Soit réciproquement v un endomorphisme de E stabilisant chacun des sous-espaces propres de u. Tout vecteur x de E s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ $(1 \leq i \leq p)$ et on a alors $u(x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$, $v(x) = v(x_1) + \ldots + v(x_p)$. Comme v stabilise chaque sous-espace propre de u, $v(x_i)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ pour tout i et $v(x_i)$ est donc la composante $v(x)_i$ du vecteur $v(x)$ dans $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ par unicité de la décomposition. La conclusion est maintenant évidente :

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x) = v(u(x)) &= v(u(x_1 + \ldots + x_p)) = v(\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_p x_p) \\ &= \lambda_1 v(x_1) + \ldots \lambda_p v(x_p) = \lambda_1 v(x)_1 + \ldots + \lambda_p v(x)_p \\ &= u(v(x)) = (u \circ v)(x)\end{aligned}$$

pour tout vecteur x de E et donc v commute avec u.

Remarque : *si l'on désigne par $\pi_1, \ldots, \pi_p$ les projecteurs spectraux de u, nous avons commencé par vérifier que tout endomorphisme v de* E *stabilisant les sous-espaces propres de u commute avec $\pi_1, \ldots, \pi_p$ puis nous avons conclu que v commute avec u en écrivant $u = \lambda_1 \pi_1 + \ldots + \lambda_p \pi_p$.*

Soit B_i une base de $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ $(1 \leq i \leq p)$ et soit $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{B}_p$ la base de E correspondante. Puisque Com_u est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ consitué des endomorphismes de E stabilisant chacun des sous-espaces $\mathrm{E}_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$, les éléments de Com_u sont les endomorphismes de E dont la matrice dans la base B est formée de blocs diagonaux $M_1, \ldots, M_p$ avec $M_i \in M_{\dim E_i}(K)$. Ces matrices définissent de manière évidente un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ de dimension

$$\dim M_{\dim E_1}(K) + \ldots + \dim M_{\dim E_p}(K) = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_i)^2$$

et donc $\dim \mathrm{Com}_u = \sum_{i=1}^{p} (\dim E_i)^2$.

3. Il est évident que Com_u contient toujours le sous-espace vectoriel engendré par les puissances de u puisque l'endomorphisme u commute avec lui-même ; noter que ce sous-espace est en fait engendré par $\mathrm{id}_E, u \ldots, u^{n-1}$ en vertu du théorème de Hamilton-Cayley (en effet, puisque $P_u(u) = 0$, u^n est une combinaison linéaire de $\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1}$ et on prouve grâce à un raisonnement par récurrence immédiat qu'il en est de même pour toute puissance u^k avec $k \geq n$).

Nous faisons maintenant l'hypothèse additionnelle que u admet n valeurs propres distinctes et nous allons vérifier que l'on a alors l'égalité

$$\mathrm{Com}_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1}).$$

3.2. Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de K tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i = 0$. Étant donné j dans $\{1, \ldots, n\}$, choisissons un vecteur non nul x_j dans le sous-espace propre E_j ; comme $u^i(x_j) = \lambda_j^i x_j$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i \right) (x_j) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i x_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i \right) x_j$$

et donc $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_j^i = 0$ puisque $x_j \neq 0$. Cela prouve que le n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est solution du système linéaire (*) de l'énoncé.

3.3. Étant donnés des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans K, le calcul du *déterminant de Vandermonde*

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est classique.

On commence par observer que la formule est manifestement vraie s'il existe des indices i et j tels que $i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j$ puisque les deux termes sont nuls ; on prouve alors le résultat en supposant que les λ_i sont deux à deux distincts et en raisonnant par récurrence sur l'entier $n \geq 2$.

– Le cas $n = 2$ est immédiat.
– En supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$, on observe en développant $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ par rapport à la dernière ligne qu'il existe un polynôme $P \in K[T]$ dont le terme dominant est $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})T^{n-1}$ et tel que

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda) = P(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in K$. Comme $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda)$ s'annule si $\lambda = \lambda_i$ avec $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ (deux lignes sont alors identiques !), $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont $n - 1$ racines distinctes de P et donc

$$P = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (T - \lambda_i).$$

Il reste à évaluer P en λ_n et à expliciter $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ grâce à l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i). \end{aligned}$$

3.4. D'après la question précédente, le système linéaire (*) est de rang n et sa seule solution est donc la solution triviale $(0,\dots,0)$. Revenant à la question 3.2, cela signifie que $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, \dots, u^{n-1}$ sont linéairement indépendants dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$; ces endomorphismes engendrent donc un sous-espace vectoriel de dimension n. Puisque le sous-espace vectoriel Com_u de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est lui-même de dimension n en vertu de la question 2.2, l'inclusion de 3.1 est une égalité :

$$\mathrm{Com}_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}, u, \dots, u^{n-1}).$$

Exercice 12.* Soient E un K-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent.

1. Tout sous-espace propre de u est stable par v : voir la question 2.1 de l'exercice précédent.

2. Supposons que u et v soient diagonalisables. Quelle que soit la valeur propre λ de u, v induit par restriction un endomorphisme diagonalisable de $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ [(1)] et il existe donc une base B_λ de $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ formée de vecteurs propres de v. Puisque

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}),$$

la réunion des B_λ est une base de E formée de vecteurs propres de v ; ces vecteurs étant également, par construction, des vecteurs propres de u, nous en déduisons que u et v sont diagonalisables dans une même base.

3. Calcul direct.

4. On a $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{K}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \mathrm{K}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Sp}(v) = \{0,2\}$, $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{K}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}(v-2\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{K}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5. Les sous-espaces $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont invariants par u et par v. Observer que le premier est contenu dans le second.

6. Quel que soit le vecteur e de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et e constituent une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&*\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}2&0&*\\0&0&*\\0&0&*\end{pmatrix}.$$

On peut prendre par exemple $e = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 14.* Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ pour un certain entier $p \geq 1$.

1. Il y a (au moins) deux manières de démontrer que le polynôme caractéristique $\mathrm{P}_u = \det(\mathrm{T}\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - u)$ de l'endomorphisme nilpotent u est T^n. La première, que l'on peut qualifier d'« algébrique » puisqu'elle consiste à travailler avec l'anneau de polynôme $\mathrm{K}[\mathrm{T}]$, est d'introduire le polynôme minimal χ_u de u et d'utiliser le fait que les facteurs irréductibles de χ_u et de P_u dans $\mathrm{K}[\mathrm{T}]$ sont les mêmes lorsqu'on fait abstraction des multiplicités. Puisqu'il existe par hypothèse un entier $p \geq 1$ tel que $u^p = 0$, le polynôme minimal de u divise le polynôme T^p et est donc une puissance de T ; tous les facteurs irréductibles de P_u sont par conséquent égaux à T et, puisque P_u est unitaire et de degré n, $\mathrm{P}_u = \mathrm{T}^n$. Une seconde manière de procéder, que l'on peut qualifier de « géométrique »,

(1) On rappelle que, si un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel est diagonalisable, alors sa restriction à tout sous-espace vectoriel F de E qu'il stabilise est un endomorphisme diagonalisable de F.

est d'utiliser les propriétés de l'endomorphisme u pour construire une base de E dans laquelle la matrice de u permet de calculer directement P_u ; c'est ce que l'on fait à la question 2 (sans utiliser le polynôme minimal) et il serait donc préférable d'intervertir les deux premières questions de l'énoncé.

Remarque : Si l'on sait a priori *que le polynôme caractéristique de u est scindé – c'est la cas par exemple lorsque* $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ *puisque tout polynôme à coefficients complexes est scindé –, on peut également raisonner comme suit. Soit* λ *une valeur propre de u et soit x un vecteur non nul dans* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *; comme* $0 = u^p(x) = \lambda^p x$, $\lambda^p = 0$ *et donc* $\lambda = 0$. *Le spectre de u est ainsi réduit à 0 et le polynôme caractéristique de u est* $\mathrm{P}_u = \det(\mathrm{T}\mathrm{id}_\mathrm{E} - u) = \mathrm{T}^n$.

2. Nous allons démontrer par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure à diagonale nulle. On désigne par p le degré de nilpotence de u.

- Si $n = 1$, c'est évident puisqu'alors $u = \mathrm{tr}(u)\mathrm{id}_\mathrm{E}$, $u^p = \mathrm{tr}(u)^p \mathrm{id}_\mathrm{E}$, donc $\mathrm{tr}(u)^p = 0$, $\mathrm{tr}(u) = 0$ et finalement $u = 0$.
- Supposons que le résultat soit acquis en dimension $n-1 \geq 1$. Comme $u^{p-1} \neq 0$, $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u^{p-1})$ est un sous-espace vectoriel strict de E ; il est en outre stable par u puisque, pour tout $x \in \mathrm{F}$, $u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $u_{|\mathrm{F}}$ de F : il existe une base B_0 de F dans laquelle la matrice de $u_{|\mathrm{F}}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle. Toute base B de E contenant B_0 satisfait à la condition voulue : posant en effet $\mathrm{B}_0 = (e_1, \ldots, e_r)$ et $\mathrm{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $u(e_i) \in \mathrm{Ker}(u^{p-1})$ pour tout $i \in \{r+1, \ldots, n\}$ et la matrice de u dans B est donc de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{N} & (*) \\ (0) & 0 \end{pmatrix},$$
où $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathrm{K})$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle, et cette matrice est également triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Retour à la question 1 – Nous pouvons maintenant démontrer très simplement que le polynôme caractéristique de u est T^n : il suffit de calculer $\det(\mathrm{T}\mathrm{id}_\mathrm{E} - u)$ en utilisant une base B de E dans laquelle la matrice U de u est triangulaire supérieure à diagonale nulle puisqu'alors la matrice $\mathrm{T}\mathrm{I}_n - \mathrm{U}$ est triangulaire supérieure, tous ses coefficients diagonaux sont égaux à T et donc
$$\mathrm{P}_u = \det(\mathrm{T}\mathrm{id}_\mathrm{E} - u) = \det(\mathrm{T}\mathrm{I}_n - \mathrm{U}) = \mathrm{T}^n.$$

3. Toute matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle est nilpotente de degré $p \leq n$: vérification immédiate par le calcul.

Exercice 15.* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit Q un sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de E autre que $\{0\}$ et E.

1. Soit u un endomorphisme de E commutant avec tous les éléments de Q. Quelle que soit la valeur propre λ de u, le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est stabilisé par tout endomorphisme de E commutant avec u (cf. exercice 11*, question 2.1) ; comme $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_\mathrm{E}) \neq \{0\}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ et u est donc une *homothétie*.

2. Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de E et la question précédente montre que seules les homothéties commutent avec tous les éléments de Q.

3. Le sous-ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est irréductible puisque la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre réelle. Un calcul immédiat permet de déterminer le sous-espace Com_A des éléments de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec A :
$$\mathrm{Com}_\mathrm{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
et il ne contient manifestement pas que les homothéties.

4. Pour que le raisonnement de la question 1 puisse s'appliquer si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un corps quelconque K, il faut et il suffit que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre ou, de manière équivalente, que son polynôme caractéristique possède au moins une racine dans K. Puisque tout polynôme à coefficient réel et de degré impair admet une racine réelle, le résultat de la question 2 est vrai pour tout espace vectoriel réel de dimension impaire : les seuls endomorphismes commutant avec tous les éléments d'un famille irréductible d'éléments de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ sont les homothéties.