Sous-espaces caractéristiques - Décomposition spectrale d'un endomorphisme - Exponentielle d'endomorphismes

Exercice 1.* 1. Tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $x = (x-\pi(x)) + \pi(x)$ et $x - \pi(x) \in \mathrm{Ker}(\pi)$, $\pi(x) \in \mathrm{Im}(\pi)$ en vertu de la condition $\pi^2 = \pi$. Cette décomposition est unique car $\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Im}(\pi) = \{0\}$: un élément x de $\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Im}(\pi)$ s'écrit sous la forme $x = \pi(y)$ avec $\pi^2(y) = 0$, donc est nul puisque $\pi = \pi^2$.
Remarque : il est bon d'observer que tout projecteur π est diagonalisable puisque le polynôme $\mathrm{T}^2 - \mathrm{T}$ est scindé à racines simples sur K ; on a donc $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et l'égalité $\mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(\pi)$ se déduit immédiatement de l'équation $\pi^2 = \pi$. Ainsi, la décomposition de E obtenue n'est pas autre chose que la décomposition en somme directes des sous-espaces propres de π...

Bien évidemment, la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ ne garantit pas que l'endomorphisme u soit un projecteur : pour obtenir un contre-exemple, il suffit de partir d'une décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{E}' \oplus \mathrm{E}''$, de choisir un *automorphisme* quelconque u'' de E'' et de considérer l'endomorphisme u de E défini par $u(x'+x'') = u''(x'')$; on a $\mathrm{E}' = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{E}'' = \mathrm{Im}(u)$, mais u est un projecteur si et seulement si $u'' = \mathrm{id}_{\mathrm{E}''}$.

2. Comme on l'a remarqué, $\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Ker}(\pi - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est le sous-espace propre de π associé à la valeur propre 1 ; en juxtaposant une base de $\mathrm{Ker}(\pi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\pi)$, on obtient donc une base de E dans laquelle la matrice de π est de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & (0) \\ (0) & \mathrm{I}_r \end{pmatrix}$$

avec $r = \dim \mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{rg}(\pi)$ et l'égalité $\mathrm{rg}(\pi) = \mathrm{tr}(\pi)$ devient évidente.

3. Étant donnés deux projecteurs $\pi_1,\ \pi_2$,

$$\begin{aligned} (\pi_1+\pi_2)^2 &= \pi_1^2 + \pi_1\circ\pi_2 + \pi_2\circ\pi_1 + \pi_2^2 \\ &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_1\circ\pi_2 + \pi_2\circ\pi_1. \end{aligned}$$

Si $\pi_1\circ\pi_2 = \pi_2\circ\pi_1 = 0$, $\pi_1+\pi_2$ est manifestement un projecteur.

Réciproquement, si $\pi_1+\pi_2$ est un projecteur, $\pi_1\circ\pi_2 = -\pi_2\circ\pi_1$. Contrairement aux apparences, cette dernière condition implique que π_1 et π_2 commutent : il en découle en effet que π_2 *stabilise* les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\pi_1)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$ (le vérifier !) et donc commute avec π_1 puisque tel est évidemment le cas sur $\mathrm{Ker}(\pi_1)$, où $\pi_1 = 0$, et sur $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\pi_1 - \mathrm{id}_\mathrm{E})$, où $\pi_1 = \mathrm{id}$. Ainsi, si $\pi_1+\pi_2$ est un projecteur, $\pi_1\circ\pi_2 = -\pi_2\circ\pi_1$ et $\pi_1\circ\pi_2 = \pi_2\circ\pi_1$, donc $2\pi_1\circ\pi_2 = 0$. Lorsque $2 \neq 0$ dans le corps K (c'est-à-dire lorsque la caractéristique de K n'est pas égale à 2), nous en déduisons $\pi_1\circ\pi_2 = \pi_2\circ\pi_1 = 0$.

Remarque : lorsque le corps K est de caractéristique 2, $(u+v)^2 = u^2+v^2$ pour tous endomorphismes u, v qui commutent et la somme de deux projecteurs est donc un projecteur si et seulement si ceux-ci commutent.

4. Dans cette dernière question, $\pi_1+\pi_2$ est un projecteur et K est de caractéristique différente de 2 donc $\pi_1\circ\pi_2 = \pi_2\circ\pi_1 = 0$.

L' inclusion $\mathrm{Ker}(\pi_1)\cap\mathrm{Ker}(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(\pi_1+\pi_2)$ est évidente ; réciproquement, étant donné $x \in \mathrm{Ker}(\pi_1+\pi_2)$, $\pi_1(x) = -\pi_2(x) = -\pi_2^2(x) = \pi_2(\pi_1(x)) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(\pi_1+\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1)\cap\mathrm{Ker}(\pi_2)$.

Comme $\pi_1\circ\pi_2 = 0$, $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(\pi_1)$ et donc $\mathrm{Im}(\pi_1)\cap\mathrm{Im}(\pi_2) = 0$. L'inclusion $\mathrm{Im}(\pi_1+\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)\oplus\mathrm{Im}(\pi_2)$ est évidente ; réciproquement, étant donné $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)\oplus\mathrm{Im}(\pi_2)$, $x = \pi_1(y)+\pi_2(z)$ et $\pi_1(x) = \pi_1^2(y) = \pi_1(y)$, $\pi_2(x) = \pi_2^2(z) = \pi_2(z)$, donc $x = \pi_1(x)+\pi_2(x) \in \mathrm{Im}(\pi_1+\pi_2)$.

Complément : il convient d'observer que les projecteurs $\pi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ sont les pendants algébriques des décompositions de l'espace vectoriel E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels. De manière précise, l'application $\pi \mapsto (\mathrm{Im}(\pi), \mathrm{Ker}(\pi))$ réalise une bijection *entre l'ensemble des endomorphismes π de E tels que $\pi^2 = \pi$ et l'ensemble des couples $(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$ formés de deux sous-espaces vectoriels* supplémentaires *de E. Étant donné un couples $(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$ de sous-espaces supplémentaires, le projecteur π correspondant est défini par $\pi_{|\mathrm{E}'} = \mathrm{id}_{|\mathrm{E}'}$ et $\pi_{|\mathrm{E}''} = 0$; la permutation des sous-espaces E' et E'' correspond au remplacement du projecteur π par le projecteur $\mathrm{id}_\mathrm{E} - \pi$.*

Exercice 2.* *Remarque préliminaire : l'énoncé suppose implictement que les applications* $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}_i$ *sont* surjectives.

Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_n$. Étant donné $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique application linéaire $\pi_i : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $\pi_i(x) = x$ si $x \in \mathrm{E}_i$ et $\pi_i(x) = 0$ si $x \in \mathrm{E}_j$ avec $j \neq i$ (si cela ne vous semble pas tout-à-fait évident, il n'y a qu'à considérer une base de E obtenue en juxtposant des bases de chacun des sous-espaces $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$) ; on a évidemment $\mathrm{Im}(\pi_i) = \mathrm{E}_i$, $\mathrm{Ker}(\pi_i) = \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{E}_j$, $\pi_i^2 = \pi_i$, $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $i \neq j$ et $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \pi_1 + \ldots + \pi_n$.

Soient réciproquement $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ des projecteurs tels que $\mathrm{Im}(\pi_i) = \mathrm{E}_i$ pour tout i, $\pi_i \circ \pi_j = 0$ pour tous i, j avec $i \neq j$ et $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \pi_1 + \ldots + \pi_n$. La décomposition de E en somme directe des sous-espaces E_i peut s'établir en raisonnant par récurrence sur $n \geq 2$ à partir du cas $n = 2$ étudié à la question 4 de l'exercice précédent, le point étant que $\pi'_p = \pi_1 + \ldots + \pi_p$ et π_{p+1} sont des projecteurs tels que $\pi'_p \circ \pi_{p+1} = \pi_{p+1} \circ \pi'_p = 0$. Il est tout aussi simple de démontrer directement notre assertion : la condition $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \pi_1 + \ldots + \pi_n$ garantit que tout vecteur x de E s'écrit comme la somme des vecteurs $x_i = \pi_i(x) \in \mathrm{E}_i = \mathrm{Im}(\pi_i)$ et cette décomposition est unique car, si $x = x'_1 + \ldots + x'_n$ avec $x'_i \in \mathrm{Im}(\pi_i)$, $\pi_i(x) = \pi_i(x'_i)$ pour tout i puisque $\pi_i \circ \pi_j = 0$ si $j \neq i$ et $x'_i = \pi_i(x'_i) = \pi_i(x)$ car $\mathrm{Im}(\pi_i) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_\mathrm{E} - \pi_i)$.

Exercice 3.* 1. L'hypothèse $\mathrm{Q}(\lambda) \neq 0$ signifie précisément que les polynômes $(\mathrm{T} - \lambda)^k$ et Q sont premiers entre eux et on peut donc écrire une identité de Bézout $\mathrm{UQ} + \mathrm{V}(\mathrm{T} - \lambda)^k = 1$ avec $\mathrm{U},\ \mathrm{V} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(\mathrm{Q}(u)) \subset \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k$ découle immédiatement de l'identité

$$\mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{U}(u)\mathrm{Q}(u) + \mathrm{V}(u)(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k = \mathrm{U}(u)\mathrm{Q}(u) + (u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k \mathrm{V}(u).$$

L'inclusion réciproque est évidente puisque $\mathrm{Q}(u)(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k = m_u(u) = 0$.

2. Les identités $\mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{U}(u)\mathrm{Q}(u) + \mathrm{V}(u)(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k = \mathrm{Q}(u)\mathrm{U}(u) + (u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k \mathrm{V}(u)$ et $(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k \mathrm{Q}(u) = 0$ impliquent immédiatement la décomposition de E en somme directe des sous-espaces $\mathrm{Ker}(\mathrm{Q}(u))$ et $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ (*lemme de décomposition des noyaux*) ; vu la question précédente, on obtient la décomposition

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Q}(u)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k.$$

3. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ sont stables par u car les endomorphismes u et $u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ commutent. Écrivant un vecteur quelconque x de E sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' \in \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $x'' \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(u)(x) &= \mathrm{P}(u)(x') + \mathrm{P}(u)(x'') \\ &= m'(u)(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})(x') + (u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) m'(u)(x'') = 0 \end{aligned}$$

car le polynôme m' (resp. $\mathrm{T} - \lambda$) annule la restriction de u au sous-espace $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^k$ (resp. $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$) ; on a donc $\mathrm{P}(u) = 0$.

Le polynôme minimal m_u de u divise le polynôme $(\mathrm{T} - \lambda)m'$; si l'on suppose en outre que λ est une valeur propre de u, m_u s'écrit sous la forme $m_u = (T - \lambda)\tilde{m}$ et le polynôme $\tilde{m}$ divise m'. Le scalaire λ est une racine simple de m_u si et seulement si $\tilde{m}(\lambda) \neq 0$; comme cette condition sera vérifiée si $m'(\lambda) \neq 0$, il suffit de s'assurer que λ n'est pas racine de m'.

Si l'on avait $m'(\lambda) = 0$, λ serait une valeur propre de la restriction de u au sous-espace $\mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et ce dernier contiendrait donc un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$. La condition $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \{0\}$ montre que ceci est impossible ; on a donc $m'(\lambda) \neq 0$ et λ est une racine simple de m_u.

4. Commençons par observer que les conditions

(i) $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$

(i') $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \{0\}$

sont équivalentes puisqu'on a déjà l'égalité $\dim(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) + \dim \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$. Les conditions

(ii) $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2$

(ii') $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2 \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$

sont également équivalentes en vertu de l'inclusion $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2$. Il en découle que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes si et seulement si les conditions (i') et (ii') le sont.

(i') $\Rightarrow$ (ii') : quel que soit $x \in \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$, $(u-\lambda \mathrm{id_E})(x)$ appartient simultanément aux sous-espaces $\mathrm{Im}(u-\lambda \mathrm{id_E})$ et $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})$, donc est nul.

(ii') $\Rightarrow$ (i') : quel que soit $x \in \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) \cap \mathrm{Im}(u-\lambda \mathrm{id_E})$, $x = (u-\lambda \mathrm{id_E})(y)$ avec $y \in \mathrm{E}$ et $(u-\lambda \mathrm{id_E})^2(y) = (u-\lambda \mathrm{id_E})(x) = 0$; on a alors par hypothèse $(u-\lambda \mathrm{id_E})(y) = 0$, d'où $x = 0$.

5. Supposons que l'endomorphisme u soit diagonalisable. Chaque valeur propre λ de u est une racine simple du polynôme minimal de u, donc

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) \oplus \mathrm{Im}(u-\lambda \mathrm{id_E})$$

en vertu de la question 2 (avec $k=1$) et $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$ en vertu de la question 4.

Exercice 4.* — En vertu du théorème du rang, les conditions $\mathrm{rg}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{rg}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$ et $\dim \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \dim \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$ sont équivalentes et, vu l'inclusion $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$, elles sont également équivalentes à l'égalité $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$.

Cette égalité est évidemment vérifiée si λ n'est pas une valeur propre de u : en effet, l'endomorphisme $u-\lambda \mathrm{id_E}$ est alors injectif et $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2 = \{0\}$.

L'exercice conciste donc à vérifier que l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si

$$\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$$

pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Si u est diagonalisable, cette égalité a été prouvée à la fin de l'exercice précédent.

Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^2$ pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, un raisonnement par récurrence immédiat permet d'établir l'égalité $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id_E})^p$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et tout entier naturel $p \geq 1$; de manière équivalente, chaque sous-espace caractéristique de u coïncide avec le sous-espace propre correspondant. Le polynôme caractéristique de u étant scindé, E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u ; c'est donc également la somme directe des sous-espaces propres de u et l'endomorphisme u est diagonalisable.

Exercice 5. — 1. On voit facilement que 1 et 2 sont des valeurs propres de u. Les sous-espace propres correspondants sont

$$\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}) = \mathbb{R}\mathrm{X}_1 \oplus \mathbb{R}\mathrm{X}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}) = \mathbb{R}\mathrm{X}_4$$

avec

$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{et} \ \mathrm{X}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{tr}(u) = 7$ et $\det(u) = 4$, les deux dernières valeurs propres de u sont les solutions des équations $x+y=3$ et $xy=2$, c'est-à-dire 1 et 2, et le polynôme caractéristique de u est donc $-(\mathrm{T}-1)^3(\mathrm{T}-2)^2$. Nous en déduisons que les deux sous-espaces caractéristiques de u sont $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^3$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$.

Bien que ce ne soit pas demandé, on voit facilement que le polynôme minimal de u est $(\mathrm{T}-1)^2(\mathrm{T}-2)^2$. En effet, les multiplicités algébriques de 1 et 2 étant strictement supérieures à leurs multiplicités géométriques, les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})$ et $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})$ sont distincts des sous-espaces caractéristiques correspondants ; les inclusions $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ et $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}) \subset \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ sont donc strictes et la décomposition

$$\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2 \oplus \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$$

s'en déduit en considérant les dimensions. Le polynôme minimal de u est donc bien $(\mathrm{T}-1)^2(\mathrm{T}-2)^2$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^3 = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$.

2. Toute base de $\mathbb{R}^5$ obtenue en juxtaposant une base de chacun des sous-espaces caractéristiques de u a la propriété désirée.

On obtient une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})$ en adjoignant à la base $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})$ un vecteur X_3 tel que $(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2\mathrm{X}_3 = 0$ et $(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})\mathrm{X}_3 \neq 0$, ou encore tel que $(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})\mathrm{X}_3$ soit un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})$.

Il suffit pour cela de déterminer une solution $(\mathrm{X}_3, \lambda_1, \lambda_2)$ de l'équation linéaire $(u - \mathrm{id}_\mathrm{E})\mathrm{X}_3 = \mathrm{X}_3 + \lambda_1 \mathrm{X}_1 + \lambda_2 \mathrm{X}_2$ telle que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ et, tous calculs faits, le triplet $(\mathrm{X}_3, 0, 1)$, où

$$\mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

convient. Un raisonnement analogue montre que l'on obtient une base de $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})^2$ en adjoignant à X_4 le vecteur

$$\mathrm{X}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

solution de l'équation $(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^5})\mathrm{X}_5 = 2\mathrm{X}_5 + \mathrm{X}_4$.

Dans la base $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_5)$, la matrice de u est sous forme réduite de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. — 1. Commençons par supposer $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. Par application du théorème de Dunford-Jordan, il existe une base de E dans laquelle de la matrice de u est de la forme $\mathrm{D} + \mathrm{N}$, où D est une matrice diagonale, N est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle et $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$. La matrice de l'endomorphisme e^u dans cette base est $e^{\mathrm{D}} e^{\mathrm{N}}$ et, comme la matrice $e^{\mathrm{N}} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{N} + \frac{1}{2}\mathrm{N}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{N}^n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale,

$$\det(e^u) = \mathrm{e}^{\mathrm{D}+\mathrm{N}} = \det(e^{\mathrm{D}})\det(e^{\mathrm{N}}) = \det(e^{\mathrm{D}}) = e^{\mathrm{tr}(\mathrm{D})} = e^{\mathrm{tr}(u)}.$$

Lorsque $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, on commence par considérer la matrice M de u dans une base de E et on applique ce quî précède à M en considérant cette matrice comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$: $\det(e^{\mathrm{M}}) = e^{\mathrm{tr}(\mathrm{M})}$; la conclusion découle alors des identités $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$ et $\det(e^u) = \det(e^{\mathrm{M}})$.

2. Supposons que l'endomorphisme u soit nilpotent et soit k un entier naturel tel que $u^{k+1} = 0$. On a

$$e^u - \mathrm{id}_\mathrm{E} = u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{k!}u^k$$

et l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(e^u - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est évidente. Pour établir l'inclusion réciproque, observons que, pour tout vecteur x dans $\mathrm{Ker}(e^u - \mathrm{id}_\mathrm{E})$,

$$u(x) = -\frac{1}{2}u^2(x) - \ldots - \frac{1}{k!}u^k(x)$$

donc

$$u(x) = \left(-\frac{1}{2}u + \ldots + \frac{1}{k!}u^{k-1}\right)(u(x)).$$

En substituant la première expression de $u(x)$ dans la seconde, on obtient une écriture de $u(x)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $u^3(x), \ldots, u^k(x)$ et un raisonnement par récurrence immédiat permet d'établir

$$u(x) \in \mathrm{Vect}(u^p(x),\ p \geq p_0)$$

pour tout entier $p_0 \geq 1$. Appliquant ce dernier résultat avec $p_0 = k+1$, la nullité de u^{k+1} implique celle de $u(x)$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

3. Les trois premières matrices ne posent pas de problème puisqu'elles sont de la forme $D+N$ avec D diagonale, N nilpotente et $DN = ND$. On obtient respectivement

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda}\vartheta \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ e^{\lambda}\vartheta & e^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les exponentielles des deux dernières matrices, on commence par les diagonaliser. On obtient sans difficulté

$$\begin{pmatrix} \lambda & \vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda+\vartheta & 0 \\ 0 & \lambda-\vartheta \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2}P$$

et

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \lambda+i\vartheta & 0 \\ 0 & \lambda-i\vartheta \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{avec } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

d'où

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & \vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix}} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda+\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{\lambda-\vartheta} \end{pmatrix} P^{-1} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} \cosh(\vartheta) & \sinh(\vartheta) \\ \sinh(\vartheta) & \cosh(\vartheta) \end{pmatrix}$$

et

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & -\vartheta \\ \vartheta & \lambda \end{pmatrix}} = Q \begin{pmatrix} e^{\lambda+i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{\lambda-i\vartheta} \end{pmatrix} Q^{-1} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.* — 1. Les polynômes $(T-1)^2$ et $T-2$ sont premiers entre eux et $(T-1)^2 - T(T-2) = 1$ est une relation de Bézout. On en déduit comme d'habitude que les endomorphismes $\pi_2 = -(u-\mathrm{id}_E)^2$ et $\pi_1 = u(u-2\mathrm{id}_E)$ sont des projecteurs tels que $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$ et $\mathrm{id}_E = \pi_1 + \pi_2$, d'images respectives $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^2$, d'où la décomposition

$$E = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^2 \oplus \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_E).$$

2. Les projecteurs spectraux π_1 et π_2 étant des polynômes en u, ils commutent avec u.

On a $u\pi_2 = 2\pi_2$ puisque $\mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_E)$ et $u\pi_1 = \pi_1 + (u-\mathrm{id}_E)\pi_1$ avec $[(u-\mathrm{id}_E)\pi_1]^2 = (u-\mathrm{id}_E)^2\pi_1 = 0$ puisque $\mathrm{Im}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^2$. On en déduit

$$e^u\pi_2 = \mathrm{e}^2\pi_2$$

et

$$\begin{aligned} e^u\pi_1 &= e^{\pi_1 u} \\ &= e^{\pi_1} e^{(u-\mathrm{id}_E)\pi_1} \\ &= (e\pi_1)(\mathrm{id}_E + (u-\mathrm{id}_E)\pi_1) \\ &= eu\pi_1. \end{aligned}$$

3. C'est déjà fait...

4. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} e^u &= e^u(\pi_1+\pi_2) \\ &= e^u\pi_1 + e^u\pi_2 \\ &= eu\pi_1 + e^2\pi_2 \\ &= eu^2(u-2E) - e^2(u-\mathrm{id}_E) \\ &= eu^3 - (e^2+2e)u^2 + 2e^2u - e^2\mathrm{id}_E. \end{aligned}$$

Exercice 8.* — *Les matrices sont données sans garantie et il est fortement conseillé de vérifier tous les calculs !*

(i) On vérifie que $\mathrm{Sp}(u) = \{2,3,4\}$, de sorte que le polynôme minimal de u est $(\mathrm{T}-2)(\mathrm{T}-3)(\mathrm{T}-4)$. En décomposant la fraction rationnelle $(\mathrm{T}-2)^{-1}(\mathrm{T}-3)^{-1}(\mathrm{T}-4)^{-1}$ en éléments simples, on obtient l'identité

$$\frac{1}{2}(\mathrm{T}-3)(\mathrm{T}-4)-(\mathrm{T}-2)(\mathrm{T}-4)+\frac{1}{2}(\mathrm{T}-2)(\mathrm{T}-3)=1,$$

qui est une relation de Bézout pour les polynômes premiers entre eux $(\mathrm{T}-3)(\mathrm{T}-4)$, $(\mathrm{T}-2)(\mathrm{T}-4)$ et $(\mathrm{T}-2)(\mathrm{T}-3)$. Les endomorphismes

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(u-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u-4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}),\ \pi_3 = -(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u-4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ et } \pi_4 = \frac{1}{2}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

sont les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, $\mathrm{Ker}(u-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(u-4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ respectivement. Leurs matrices respectives dans la base canonique sont

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Partant de l'identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_2+\pi_3+\pi_4$, on obtient

$$u^n = 2^n\pi_2 + 3^n\pi_3 + 4^n\pi_4$$

pour tout entier naturel n et la matrice de u^n dans la base canonique est

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3.2^{n-1}-4.3^n+14.4^{n-1} & -2^n+3^n & 2^{n-1}-4.3^n+14.4^{n-1} \\ -4.3^n+4^{n+1} & 3^n & -4.3^n+4^{n+1} \\ -3.2^{n-1}+4.3^n-10.4^{n-1} & 2^n-3^n & -2^{n-1}+4.3^n-10.4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a enfin

$$e^{tu} = e^{2t}\pi_2 + e^{3t}\pi_3 + e^{4t}\pi_4$$

pour tout nombre réel t et la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique est

$$e^{t\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{2t}-4e^{3t}+\frac{7}{2}e^{4t} & -e^{2t}+e^{3t} & \frac{1}{2}e^{2t}-4e^{3t}+\frac{7}{2}e^{4t} \\ -4e^{3t}+4e^{4t} & e^{3t} & -4e^{3t}+4e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t}+4e^{3t}-\frac{5}{2}e^{4t} & e^{2t}-e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{2t}+4e^{3t}-\frac{5}{2}e^{4t} \end{pmatrix}.$$

(ii) On vérifie que $\mathrm{Sp}(u) = \{1,4\}$, la valeur propre étant de multiplicité géométrique égale à 2 ; l'endomorphisme u est donc diagonalisable et son polynôme minimal est $(\mathrm{T}-1)(\mathrm{T}-4)$.

En procédant comme en (i), on obtient les expressions

$$\pi_1 = -\frac{1}{3}(u-4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \ \text{ et } \ \pi_4 = \frac{1}{3}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

pour les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(u-4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ respectivement. Leurs matrices dans la base canonique s'en déduit immédiatement. Enfin,

$$u^n = \pi_1 + 4^n\pi_4 \ \text{ et } \ \mathrm{B}^n = \begin{pmatrix} -2+4^n & 1+4^n & 1+4^n \\ 1+4^n & -2+4^n & 1+4^n \\ 1+4^n & 1+4^n & -2+4^n \end{pmatrix}$$

pour tout entier naturel n et

$$e^{tu} = e^t\pi_1 + e^{4t}\pi_4,\quad e^{t\mathrm{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^t+e^{4t} & e^t+e^{4t} & e^t+e^{4t} \\ e^t+e^{4t} & -2e^t+e^{4t} & e^t+e^{4t} \\ e^t+e^{4t} & e^t+e^{4t} & -2e^t+e^{4t} \end{pmatrix}$$

pour tout nombre réel t.

(iii) On vérifie que $\mathrm{Sp}(u) = \{1,2\}$, la valeur propre 2 étant de multiplicité algébrique 2 mais de multiplicité géométrique 1 seulement. Cet endomorphisme n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal est $(\mathrm{T}-1)(\mathrm{T}-2)^2$. On obtient une relation de Bézout entre $T-1$ et $(\mathrm{T}-2)^2$ en faisant la division euclidienne du second par le premier :

$$1 = (\mathrm{T}-2)^2 - (\mathrm{T}-1)(\mathrm{T}-3).$$

Les projecteurs spectraux sur les sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont respectivement

$$\pi_1 = (u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \text{ et } \pi_2 = -(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(u-3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}),$$

de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Avant de calculer u^n et e^{tu}, observons que $u\pi_2 = 2\pi_2 + (u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ avec $[(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2]^2 = 0$, de sorte que $u^n\pi_2 = (u\pi_2)^n = 2^n\pi_2 + n2^{n-1}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ et $e^{tu}\pi_2 = e^{2t}\pi_2 + e^{2t}t(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$. La matrice de $(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2$ dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a par conséquent :

$$u^n = \pi_1 + 2^n\pi_2 + (u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2, \quad \mathrm{C}^n = \begin{pmatrix} 1-n2^n & 2^{n-1}n & (n+1)2^n-1 \\ 2(1-2^n) & 2^n & 2(2^n-1) \\ -n2^n & n2^{n-1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$$

pour tout entier naturel n et

$$e^{tu} = e^t\pi_1 + e^{2t}\pi_2 + te^{2t}(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\pi_2, \quad e^{t\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} e^t-2te^{2t} & te^{2t} & -e^t+(1+2t)e^{2t} \\ 2e^t-2e^{2t} & e^{2t} & 2(e^{2t}-e^t \\ -2te^{2t} & te^{2t} & (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

pour tout nombre réel t.

Exercice 9. — Le rang de l'endomorphisme u est manifestement égal à 1, ce qui signifie que 0 est une valeur propre de multiplicité géométrique $\dim \mathrm{Ker}(u) = n$; c'est en fait l'unique valeur propre de u car $\mathrm{tr}(u) = 0$ et u n'est pas diagonalisable.

L'image de u est de manière évidente la droite engendrée par le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1, lequel appartient à $\mathrm{Ker}(u)$; nous avons donc $u^2 = 0$ et $e^{tu} = 1 + tu$ pour tout nombre réel t.

Exercice 10. — On désigne par $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1 & 2. Le sous-espace $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n-1$ et engendré par les vecteurs $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_3, \ldots, \mathrm{E}_{n-1} - \mathrm{E}_n$. La valeur propre $(a-b)$ est de multiplicité géométrique $n-1$ et, comme $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = na$, la dernière valeur propre x de A est la solution de l'équation $(n-1)(a-b)+x = na$, soit $x = a+(n-1)b$. Le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-(a+(n-1)b)\mathrm{I}_n)$ est la droite engendrée par le vecteur $\mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{E}_n$.

Les vecteurs $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n - \mathrm{E}_{n-1}$ et $\mathrm{E}_1 + \ldots + \mathrm{E}_n$ constituent clairement une base de $\mathbb{R}^n$ car les $n-1$ premiers forment une base de l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n$, lequel ne contient pas le dernier vecteur. Tous ces vecteurs étant des vecteurs propres de A, A est diagonalisable et, si P désigne la matrice dont les colonnes sont leurs coordonnées dans la base canonique (c'est la matrice ayant des 1 sur la diagonale, des -1 sur la première sous-diagonale et des 1 sur la dernière colonne, les autres coefficients étant nuls),

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(a-b, \ldots, a-b, a+(n-1)b).$$

Lorsque $b \neq 0$, les deux valeurs propres de A sont distinctes et son polynôme minimal est donc $(\mathrm{T}-(a-b))(\mathrm{T}-(a-(n-1)b)) = \mathrm{T}^2 - (2a-nb)\mathrm{T} + (a-b)(a-n-1b)$.

Lorsque $b = 0$, $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n$ et son polynôme minimal est $\mathrm{T} - a$.

3. La matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas l'une de ses valeurs propres, donc si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq (n-1)b$. Le cacul de A^{-1} se fait aisément en utilisant le polynôme minimal de A :

– lorsque $b = 0$, $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n$ et donc $\mathrm{A}^{-1} = a^{-1}\mathrm{I}_n$;

– lorsque $b \neq 0$, $\mathrm{A}^2-(2a+nb)\mathrm{A}+(a-b)(a-(n-1)b)=0$ et donc

$$\mathrm{A}^{-1}=-\frac{1}{(a-b)(a-nb)}(\mathrm{A}-(2a+nb)\mathrm{I}_n).$$

4 & 5. Lorsque $b \neq 0$, la méthode la plus efficace pour calculer explicitement A^n et $e^{t\mathrm{A}}$ est d'utiliser les projecteurs spectraux de A. Partant de la relation de Bézout $(\mathrm{T}-(a-(n-1)b))-(\mathrm{T}-(a-b))=nb$, nous obtenons immédiatement

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{nb}\left((\mathrm{A}-(a-(n-1)b)\mathrm{I}_n)-(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)\right)$$

et

$$\mathrm{A}=\frac{1}{nb}\left((a-b)(\mathrm{A}-(a-(n-1)b)\mathrm{I}_n)-(a-(n-1)b)(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^p &= \frac{1}{nb}\left((a-b)^p(\mathrm{A}-(a-(n-1)b)\mathrm{I}_n)-(a-(n-1)b)^p(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)\right)\\ &= \frac{1}{nb}\left((a-b)^p-(a-(n-1)b)^p\right)\mathrm{A}+\frac{1}{nb}(a-b)(a-(n-1)b)\left((a-(n-1)b)^{p-1}-(a-b)^{p-1}\right)\mathrm{I}_n\end{aligned}$$

pour tout entier naturel $p \geq 1$ et

$$\begin{aligned}e^{t\mathrm{A}} &= \frac{1}{nb}\left(e^{(a-b)t}(\mathrm{A}-(a-(n-1)b)\mathrm{I}_n)-e^{(a-(n-1)b)t}(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)\right)\\ &= \frac{1}{nb}\left(e^{(a-b)t}-e^{(a-(n-1)b)t}\right)\mathrm{A}+\frac{1}{nb}\left((a-b)e^{(a-(n-1)b)t}-(a-(n-1)b)e^{(a-b)t}\right)\mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

Exercice 11. — 1. Le rang de l'endomorphisme $u-(1-a)\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est égal à 1 et $1-a$ est donc une valeur propre de u de multiplicité géométrique égale à 3. Comme $\mathrm{tr}(u)=4$, la dernière valeur propre de u est $4-3(1-a)=1+3a$.

2. Si $a=0$, $1-a=1+3a=1$ et l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable car $u \neq \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

3. Lorsque $a \neq 0$, les multiplicités géométriques et algébriques des valeurs propres $1-a$ et $1+3a$ de u sont les mêmes (respectivement 3 et 1) et l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Le polynôme caractéristique de u est $(\mathrm{T}-(1-a))^3(\mathrm{T}-(1+3a))$; son polynôme minimal est $(\mathrm{T}-(1-a))(\mathrm{T}-(1+3a))$.

5. L'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces propres $\mathrm{E}_1=\mathrm{Ker}(u-(1-a)\mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{E}_2=\mathrm{Ker}(u-(1+3a)\mathrm{id}_\mathrm{E})$ de u car leur intersection est nulle et $\dim\mathrm{Ker}(u-(1-a)\mathrm{id}_\mathrm{E})=3$, $\dim\mathrm{Ker}(u-(1+3a)\mathrm{id}_\mathrm{E})=1$.

6. Les projecteurs spectraux s'obtiennent à partir de la relation de Bézout $(\mathrm{T}-(1-a))-(\mathrm{T}-(1+3a))=4a$: $\pi_1=-\frac{1}{4a}(u-(1+3a)\mathrm{id}_\mathrm{E})$ est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et $\pi_2=\frac{1}{4a}(u-(1-a)\mathrm{id}_\mathrm{E})$ est le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

7. On a $u^k=(1-a)^k\pi_1+(1+3a)^k\pi_2$ pour tout entier naturel k et $e^u=e^{1-a}\pi_1+e^{1+3a}\pi_2$. Les matrices de π_1 et π_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant respectivement

$$-\frac{1}{4a}\begin{pmatrix}-3a & a^2 & a^2 & a\\ 1 & -3a & a & 1\\ 1 & a & -3a & 1\\ a & a^2 & a^2 & -3a\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4a}\begin{pmatrix}a & a^2 & a^2 & a\\ 1 & a & a & 1\\ 1 & a & a & 1\\ a & a^2 & a^2 & a\end{pmatrix},$$

le calcul des matrices de u^k et e^u ne pose pas de problème...