Quelques applications de la réduction des endomorphismes

Exercice 1.* — Les solutions du système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{X}(t) = \mathrm{AX}(t) + \mathrm{V}(t)$$

sont les applications X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\mathrm{X}(t) = \exp(t\mathrm{A})\mathrm{X}_0 + \int_0^t \exp((t-s)\mathrm{A})\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s$$

avec $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^3$.Le premier terme du membre de droite est la solution générale de l'équation homogène (i.e. avec $\mathrm{V}(t) = 0$) et le second une solution particulière du système inhomogène obtenue par la méthode de « variation de la constante ».

Écrivant $\mathrm{V}(t)$ sous la forme $\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}' + t\mathrm{V}''$ avec

$$\mathrm{V}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le calcul de l'intégrale

$$\int_0^t \exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}'\mathrm{d}s + \int_0^t s\exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}''\mathrm{d}s$$

est particulièrement facile lorsque la matrice A est *inversible* car tout se passe alors comme si A était un nombre réel :

$$\int_0^t \exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}'\mathrm{d}s = -\mathrm{A}^{-1}\exp(-t\mathrm{A})\mathrm{V}' \quad \text{et} \quad \int_0^t s\exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}''\mathrm{d}s = -\mathrm{A}^{-1}\exp(-t\mathrm{A})(t\mathrm{I}_3 + \mathrm{A}^{-1})\mathrm{V}'',$$

d'où

$$\int_0^t \exp(-s\mathrm{A})\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s = -\mathrm{A}^{-1}\exp(-t\mathrm{A})\mathrm{V}(t) - \mathrm{A}^{-2}\exp(-t\mathrm{A})\mathrm{V}''.$$

Remarque : Les calculs précédents (qu'il faut vérifier !) se déduisent simplement de l'identité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{A}^{-1}\exp(t\mathrm{A})) = \exp(t\mathrm{A}).$$

Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour les solutions du système différentiel considéré lorsque la matrice A est *inversible* :

$$\mathrm{X}(t) = \exp(t\mathrm{A})\mathrm{X}_0 - \mathrm{A}^{-1}\mathrm{V}(t) - \mathrm{A}^{-2}\mathrm{V}''.$$

Il reste maintenant à utiliser les calculs effectués au cours de l'exercice 8 de la fiche 4.

- Dans le premier cas,

$$\exp(t\mathrm{A}) = \frac{1}{3}(e^{4t} - e^t)\mathrm{A} + \frac{1}{3}(4e^t - e^{4t})\mathrm{I}_3, \quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{4}(5\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{-2} = \frac{1}{16}(21\mathrm{I}_3 - 5\mathrm{A}),$$

le calcul de A^{-1} se faisant aisément à partir de l'identité $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_3 = 0$ (polynôme minimal).

- Dans le second cas,

$$\exp(t\mathrm{A}) = e^t(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2 - e^{2t}((1-2t)\mathrm{I}_3 + t\mathrm{A})(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)(\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_3) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{4}(\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} + 8\mathrm{I}_3),$$

le polynôme minimal de A étant dans ce cas $\mathrm{T}^3 - 5\mathrm{T}^2 + 8\mathrm{T} - 4$.

Exercice 3.* — La solution du système différentiel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{X}(t) = \mathrm{AX}(t)$ prenant la valeur X_0 en $t = 0$ est l'application X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\mathrm{X}(t) = \exp(t\mathrm{A})\mathrm{X}_0$.

La matrice A admet $a-b$ pour valeur propre et le sous-espace propre correspondant est l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1+\ldots+x_n=0$. Désignant par π le projecteur spectral sur $\mathrm{H}=\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-(a-b)\mathrm{I}_n)$, l'endomorphisme $(\mathrm{I}_n-\pi)$ est un projecteur de noyau H et

$$\exp(t\mathrm{A})\pi=\exp(t(a-b))\pi$$

puisque $\mathrm{A}\pi=(a-b)\pi$; il en découle que l'on a

$$\exp(t\mathrm{A})=\exp(t\mathrm{A})(\pi+(\mathrm{I}_n-\pi))=\exp(t\mathrm{A})\pi+\exp(t\mathrm{A})(\mathrm{I}_n-\pi)=\exp(t(a-b))\pi+\exp(t\mathrm{A})(\mathrm{I}_n-\pi)$$

et donc

$$\mathrm{X}(t)=\exp(t\mathrm{A})\mathrm{X}_0=\exp(t(a-b))\mathrm{X}_0$$

pour tout vecteur X_0 appartenant à l'hyperplan H.

Exercice 4.* — 1. Vérification par le calcul. On peut aussi observer que la matrice A admet 0 pour valeur propre – car $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ — ainsi que -9 — car $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ — ; la troisième valeur propre λ de A est déterminée par la condition $-9+\lambda=\mathrm{tr}(\mathrm{A})=-18$, soit $\lambda=-9$, et le polynôme caractéristique de A est donc $\mathrm{P}_\mathrm{A}=-\mathrm{X}(\mathrm{X}+9)^2$.

2. Le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)$ est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; il est donc de dimension 1.

3. La matrice A n'est pas diagonalisable puisque la multiplicité algébrique (2) de la valeur propre -9 est strictement supérieure à sa multiplicité géométrique (1).

4. Le polynôme minimal de A ayant les même facteurs irréductibles que P_A, $m_\mathrm{A}=\mathrm{X}(\mathrm{X}+9)$ ou $m_\mathrm{A}=\mathrm{X}(\mathrm{X}+9)^2$; comme la première possibilité impliquerait la diagonalisabilité de A, $m_\mathrm{A}=\mathrm{X}(\mathrm{X}+9)^2$.

5. En effectuant la division euclidienne de $(\mathrm{X}+9)^2$ par X, $(\mathrm{X}+9)^2=\mathrm{X}(\mathrm{X}+18)+81$ et donc

$$\mathrm{I}_3=\frac{1}{81}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)^2-\frac{1}{81}\mathrm{A}(\mathrm{A}+18\mathrm{I}_3).$$

Les projecteurs spectraux sur les sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)^2$ sont respectivement

$$\pi_1=\frac{1}{81}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\pi_2=-\frac{1}{81}\mathrm{A}(\mathrm{A}+18\mathrm{I}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

6. La restriction de A au sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ étant identiquement nulle, $e^{t\mathrm{A}}x=x$ pour tout $x\in\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$.

La restriction de $\mathrm{N}=\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3$ au sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)^2$ étant nilpotente d'indice 2,

$$e^{t\mathrm{A}}y=e^{-9t\mathrm{I}_3+\mathrm{N}}y=e^{-9t\mathrm{I}_3}e^{t\mathrm{N}}y=e^{-9t}(\mathrm{I}_3+t\mathrm{N})y=e^{-9t}y+te^{-9t}\mathrm{N}y$$

pour tout $y\in\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)^2$.

Nous obtenons finalement :

$$e^{t\mathrm{A}}=e^{t\mathrm{A}}\pi_1+e^{t\mathrm{A}}\pi_2=\pi_1+e^{-9t}\pi_2+e^{-9t}t(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)\pi_2.$$

7. Soit $q_i(t)$ la quantité de polluant dans le lac L_i à l'instant t. Durant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, il circule par hypothèse $2a\mathrm{d}t$ (resp. $5a\mathrm{d}t$) litres d'eau du lac L_1 au lac L_2 (resp. L_3), lesquels emportent respectivement $q_1(t)\frac{2a}{\mathrm{V}}\mathrm{d}t$ et $q_1(t)\frac{5a}{\mathrm{V}}\mathrm{d}t$ grammes de polluant ; dans le même temps, il entre $4a\mathrm{d}t$ (resp. $3a\mathrm{d}t$) litres d'eau provenant du lac L_2 (resp. L_3), apportant $q_2(t)\frac{4a}{\mathrm{V}}\mathrm{d}t+q_3(t)\frac{3a}{\mathrm{V}}\mathrm{d}t$ grammes de polluant. On obtient ainsi

$$q_1(t+\mathrm{d}t)=q_1(t)+\mathrm{d}q_1(t)=q_1(t)+\frac{a}{\mathrm{V}}(-7q_1(t)\mathrm{d}t+4q_2(t)\mathrm{d}t+3q_3(t)\mathrm{d}t),$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{a}{\mathrm{V}}(-7q_1(t)+4q_2(t)+3q_3(t)).$$

Le même raisonnement pour les lacs L_2 et L_3 conduit finalement au système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = \frac{a}{\mathrm{V}}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}.$$

Posant $q_i(0) = q_i$, les quantités de pollutant à l'instant t sont données par

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{a}{\mathrm{V}}t\mathrm{A}}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \pi_1\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + e^{-9\frac{a}{\mathrm{V}}t}\left[\mathrm{I}_3 + \frac{a}{\mathrm{V}}t(\mathrm{A}+9\mathrm{I}_3)\right]\pi_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

et convergent donc vers

$$\begin{pmatrix} q_1(\infty) \\ q_2(\infty) \\ q_3(\infty) \end{pmatrix} = \pi_1\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} q_1+q_2+q_3 \\ q_1+q_2+q_3 \\ q_1+q_2+q_3 \end{pmatrix}.$$

La pollution tend ainsi à se répartir équitablement entre les trois lacs.

Exercice 5.* — *Modélisation.* On suppose que le volume de chacune des cellules est constant, ce qui permet d'identifier la concentration et la quantité du composé considéré.

Les règles de diffusion se traduisent par les relations

$$dc_{\mathrm{A}}(t) = -xc_{\mathrm{A}}(t)\mathrm{d}t + yc_{\mathrm{B}}(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad dc_{\mathrm{B}}(t) = xc_{\mathrm{A}}(t)\mathrm{d}t - yc_{\mathrm{B}}(t)\mathrm{d}t,$$

de sorte que l'évolution des concentrations au cours du temps est gouvernée par le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} c_{\mathrm{A}}(t) \\ c_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & y \\ x & -y \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c_A(t) \\ c_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix}.$$

1. Posons $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -x & y \\ x & -y \end{pmatrix}$. La matrice est diagonalisable, de valeurs propres 0 et $-(x+y)$:

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(\mathrm{M}+(x+y)\mathrm{I}_3) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme minimal est $\mathrm{T}(\mathrm{T}+(x+y))$ et les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}+(x+y)\mathrm{I}_3)$ sont respectivement

$$\pi_0 = \frac{1}{x+y}(\mathrm{M}+(x+y)\mathrm{I}_3) \quad \text{et} \quad \pi_{-(x+y)} = -\frac{1}{x+y}\mathrm{M},$$

de sorte que

$$\exp(t\mathrm{M}) = \pi_0 + e^{-t(x+y)}\pi_{-(x+y)} = \frac{1}{x+y}\begin{pmatrix} y+xe^{-t(x+y)} & y(1-e^{-t(x+y)}) \\ x(1-e^{-t(x+y)}) & x+ye^{-t(x+y)} \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les conditions intiales étant données par $c_{\mathrm{A}}(0) = 1$ et $c_{\mathrm{B}}(0) = 0$, nous obtenons finalement :

$$c_{\mathrm{A}}(t) = \frac{1}{x+y}(y+xe^{-t(x+y)}) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{B}}(t) = \frac{x}{x+y}(1-e^{-t(x+y)}).$$

2. La concentration dans la cellule A décroît strictement jusqu'à la valeur limite $c_{\mathrm{A}}(\infty) = \frac{y}{x+y}$ tandis que celle dans la cellule B croît strictement jusqu'à la valeur limite $c_{\mathrm{B}}(\infty) = \frac{x}{x+y}$.

Exercice 6.* — On désigne respectivement par $n_{\mathrm{A}}(t)$ et $n_{\mathrm{B}}(t)$ le nombre d'individus des espèces A et B à l'instant t.

1. L'évolution des deux populations est gouvernée par le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathrm{A}} \begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(0) \\ n_{\mathrm{B}}(0) \end{pmatrix} = e^{t\mathrm{A}} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable, de valeurs propres 1 et 3 ; les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-3\mathrm{I}_2)$ sont respectivement

$$\pi_1 = -\frac{1}{2}(\mathrm{A}-3\mathrm{I}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_3 = \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\exp(t\mathrm{A}) = e^t\pi_1 + e^{3t}\pi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t+e^{3t} & e^t-e^{3t} \\ e^t-e^{3t} & e^t+e^{3t} \end{pmatrix}$$

et finalement

$$n_{\mathrm{A}}(t) = 150e^t - 50e^{3t}, \quad n_{\mathrm{B}}(t) = 150e^t + 50e^{3t}.$$

2. L'espèce A est en voie d'extinction puisque $n_{\mathrm{A}}(t) \sim -50e^{3t}$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Cette espèce disparaît en fait dès l'instant t_0 défini par la condition $n_{\mathrm{A}}(t_0) = 0$, soit $t_0 = \frac{1}{2}\log(3) \simeq 0,55$.

3. Dans cette deuxième hypothèse, l'évolution des populations est gouvernée par le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix} = \mathrm{B}\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. En utilisant les calculs de l'exercice 5 (avec $x = y = 1$), on obtient

$$\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(t) \\ n_{\mathrm{B}}(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathrm{B}}\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(0) \\ n_{\mathrm{B}}(0) \end{pmatrix} = \left[\pi_0 + e^{-2t}\pi_{-2}\right]\begin{pmatrix} n_{\mathrm{A}}(0) \\ n_{\mathrm{B}}(0) \end{pmatrix}$$

avec $\pi_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{B}+3\mathrm{I}_2)$ et $\pi_{-2} = -\frac{1}{2}\mathrm{B}$, soit

$$n_{\mathrm{A}}(t) = 300 - 100e^{-2t} \text{ et } n_{\mathrm{B}}(t) = 300 + 100e^{-2t}.$$

4. L'effectif de la population A croît strictement jusqu'à la valeur limite $n_{\mathrm{A}}(\infty) = 300$ tandis que celui de la population B décroît strictement jusqu'à la valeur limite $n_{\mathrm{B}}(\infty) = 300$; les deux populations tendent donc à s'équilibrer au cours du temps, ce qui traduit bien un fonctionnement en symbiose.

Exercice 9.* — Désignons respectivement par $p_r(n)$ et $p_u(n)$ l'effectif des populations rurale et urbaine à l'année n. À l'année $n+1$, ces effectifs deviennent

$$p_r(n+1) = p_r(n) - \frac{1}{2}p_r(n) + \frac{1}{4}p_u(n) \quad \text{et} \quad p_u(n+1) = p_u(n) + \frac{1}{2}p_r(n) - \frac{1}{4}p_u(n),$$

soit

$$\begin{pmatrix} p_r(n) \\ p_u(n) \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} p_r(n) \\ p_u(n) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable, de valeurs propres $\frac{1}{4}$ et 1 ; les projecteurs spectraux sur les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\frac{1}{4}\mathrm{I}_2)$ sont respectivement

$$\pi_1 = \frac{4}{3}(\mathrm{A}-\frac{1}{4}\mathrm{I}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi_{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{A}^n = \pi_1 + \frac{1}{4^n}\pi_{\frac{1}{4}}$$

pour tout n.

Les effectifs à l'année n sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} p_r(n) \\ p_u(n) \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n\begin{pmatrix} p_r(0) \\ p_u(0) \end{pmatrix}$$

et donc tendent vers

$$\pi_1 \begin{pmatrix} p_r(0) \\ p_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r(0) + p_u(0) \\ 2(p_r(0) + p_u(0)) \end{pmatrix}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

La population évolue donc vers une répartition stable entre zones rurales et zones urbaines : les premières sont occupées par un tiers de la population totale initiale, les secondes par les deux autres tiers.