Structure des endomorphismes nilpotents - Réduite de Jordan

Exercice 1* — 1. La condition $u^2 = 0$ est équivalente à l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u étant supposé non nul, $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel strict de E et $\mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$; on a donc

$$\dim \mathrm{Ker}(u) < \dim \mathrm{E} = 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \dim \mathrm{Im}(u),$$

ce qui implique que l'inclusion initiale soit une égalité : $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim \mathrm{Ker}(u)$.

2. Soit e_2 un vecteur dans $\mathrm{E} - \mathrm{Ker}(u)$ et soit $e_1 = u(e_2)$. La famille (e_1, e_2) est libre : quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, on obtient $\lambda_2 u(e_2) = 0$ en appliquant u et donc $\lambda_2 = 0$ puisque, par construction, le vecteur $e_1 = u(e_2)$ est non nul ; on a ainsi $\lambda_1 e_1 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$ par le même argument que précédemment. Nous venons de construire une base de E dans laquelle la matrice de u est celle que l'on souhaite puisque $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.

3. On vérifie immédiatement que les matrices $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ de déterminant nul sont nilpotentes. Réciproquement, si une matrice non nulle $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ est nilpotente, il découle de la question précédente qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; on a alors

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & \alpha\gamma \end{pmatrix}$$

et M est de la forme annoncée.

Remarque : il serait préférable d'observer qu'une matrice $M \in M_2(K)$ est nilpotente si et seulement si son polynôme carctéristique est égal à T^2, c'est-à-dire si et seulement si la trace et le déterminant de M sont nuls ; il en découle immédiatement que M est de la forme requise.

Exercice 2* — 1. La condition $u^2 = 0$ est équivalente à l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u étant par hypothèse de rang r, il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_r \in \mathrm{E}$ tels que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ soit une base de $\mathrm{Im}(u)$; comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on peut compléter cette dernière en une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$ — de dimension $n - r$ — en adjoignant des vecteurs convenables $v_{r+1}, \ldots, v_{n-r}$.

2. La famille $\mathrm{B} = (u(e_1), e_1, u(e_2), e_2, \ldots, u(e_r), e_r, v_{r+1}, \ldots, v_{n-r})$ contenant $n = \dim \mathrm{E}$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour établir qu'il s'agit d'une base de E. Étant donnés des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_{n-r} \in \mathrm{K}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) + \mu_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0,$$

on obtient

$$\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$$

en appliquant u, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ puisque la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre, puis

$$\mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) + \mu_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0$$

et donc $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$; la famille B est libre.

3. Chacun des sous-espaces $\mathrm{K}u(e_i) \oplus \mathrm{K}e_i$, $1 \leq i \leq r$, et $\mathrm{K}v_j$, $r + 1 \leq j \leq n - r$, est stable par u. La matrice de u dans la base B est par conséquent diagonale par blocs, formée des r blocs de taille 2

$$\mathrm{Mat}(u,\ (u(e_i), e_i)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leq i \leq r$, et des $n - 2r$ blocs de taille 1

$$\mathrm{Mat}(u,\ (v_j)) = (0),$$

$r + 1 \leq j \leq n - r$.

Remarque. On vient de re-démontrer un cas particulier du théorème de structure des endomorphismes nilpotents : étant donné un endomorphisme u de E de polynôme minimal T^2, il existe une base de E dans laquelle *la matrice de u est diagonale par blocs et constituée de blocs de Jordan $J_p(O)$ de taille p avec $p \in \{1,2\}$; désignant respectivement par n_1 et n_2 le nombre de blocs $J_1(0)$ et $J_2(0)$, on a en outre*

$$n_1 + 2n_2 = \dim E \text{ et } n_1 + n_2 = \dim Ker(u),$$

donc $n_2 = \dim E - \dim Ker(u) = \dim Im(u)$.

Exercice 3* — 1. La réduite de Jordan d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$ est une matrice diagonale par blocs formée de blocs de Jordan $\mathrm{J}_p(0)$ de taille $p \leq 4$. Désignant par n_p le nombre de blocs de taille p, une telle matrice existe si et seulement si

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 4,$$

c'est-à-dire si et seulement si (n_1, n_2, n_3, n_4) est l'un des quadruplets

$$(0,0,0,4),\ (1,0,1,0),\ (0,2,0,0),\ (2,1,0,0),\ (4,0,0,0);$$

les matrices correspondantes sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant les notations qui précèdent, le polynôme minimal de l'endomorphisme nilpotent u est T^p, où $p \in \{1,2,3,4\}$ est le plus grand entier tel que $n_p \neq 0$. On obtient ainsi respectivement T^4, T^3, T^2, T^2 et T pour les cinq matrices précédentes et il en ressort que les troisième et quatrième matrices ont le même polynôme minimal bien qu'elles ne soient pas semblables.

Exercice 4* — Étant données deux matrices M et M$'$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés, il a été démontré en cours que M et M$'$ sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes réduites de Jordan à une permutation des blocs près ; en particulier, deux matrices sous forme de Jordan sont semblables si et seulement si elles sont égales à une permutation des blocs près.

Soit M une matrice sous forme de Jordan et soit M$'$ la matrice diagonale définie par la diagonale de M ; M$'$ est bien évidemment sous forme de Jordan. La matrice M étant triangulaire supérieure, elle est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice M$'$; d'après ce que l'on vient de dire, cela est le cas si et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, donc si et seulement si M est diagonale.

Remarque : étant donnée une matrice M sous la forme de Dunford-Jordan : $M = D + N$, où D est une matrice diagonalisable, N est une matrice nilpotente et $DN = ND$, la matrice M *est diagonalisable si et seulement si* $N = 0$. *Cette condition est bien évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit observer que les matrices M et D commutent et admettent donc une base commune de diagonalisation ; il en découle que la matrice $N = M - D$ s'écrit sous forme diagonale dans cette base et donc* $N = 0$ *puisqu'une matrice nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.*

Exercice 5* — 1. En examinant les blocs de Jordan possibles (cf. exercice 3), on voit qu'il y a trois classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1},\ \mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Les polynômes minimaux correspondant sont T^3, T^2 et T, de sorte que deux matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

2. Le polynôme minimal de la matrice A divise son polynôme caractéristique et donc est de la forme

$$(\mathrm{X} - \lambda_1)^{m_1} \dots (\mathrm{X} - \lambda_p)^{m_p}$$

avec $1 \leq m_i \leq h_i \leq 3$. On en déduit que la réduite de Jordan de la matrice A est constituée de blocs de Jordan $J_k(\lambda_i)$, avec $1 \leq k \leq m_i$ $(1 \leq i \leq p)$.

Étant donnés $i \in \{1, \dots, p\}$ et $k \in \{1, \dots, m_i\}$, désignons par $n_k(\lambda_i)$ le nombre de blocs de Jordan $\mathrm{J}_k(\lambda_i)$ figurant dans la réduite de Jordan de A. Quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$, le calcul du polynôme caractéristique montre que l'on a

$$\sum_{k=1}^{m_i} k n_k(\lambda_i) = h_i \ ;$$

comme $m_i \leq h_i \leq 3$, les seuls cas possibles sont les suivants :
- $m_i = 1$, $n_1(\lambda_i) = h_i$;
- $m_i = 2$, $n_2(\lambda_i) = 1,\ n_1(\lambda_i) = h_i - m_i$,
- $m_i = 3$, $n_3(\lambda_i) = 1$, $n_1(\lambda_i) = n_2(\lambda_i) = 0$.

On constate ainsi que la réduite de Jordan de A est totalement déterminée par la donnée des entiers $h_1, m_1, \dots, h_p, m_p$ — c'est-à-dire par les polynômes caractéristique et minimal de A — et toute matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les mêmes polynômes caractéristique et minimal que A a la même réduite de Jordan que A et donc est semblable à A.

Exercice 6* — 1. Le polynôme minimal m_u de l'endomorphisme u est scindé puisqu'il divise son polynôme caractéristique. L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable si et seulement si m_u possède une racine multiple, donc si et seulement si $m_u = (\mathrm{T} - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La réduite de Jordan de u contient alors un bloc de Jordan $\mathrm{J}_2(\lambda)$ de taille 2 et c'est nécessairement l'unique bloc de Jordan qui puisse apparaître pour des raisons de dimension.

2. Soit e_2 un vecteur de E tel que $(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) \neq 0$. Posant $e_1 = (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2)$, la famille (e_1, e_2) est libre : en effet, si λ_1 et λ_2 sont des scalaires tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, on obtient

$$0 = \lambda_1(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_1) + \lambda_2(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) = \lambda_1(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2(e_2) + \lambda_2(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) = \lambda_2(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2),$$

donc $\lambda_2 = 0$ puisque $(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) \neq 0$, puis

$$0 = \lambda_1 e_1 = \lambda_1(u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2)$$

et donc $\lambda_1 = 0$ pour la même raison.

La famille (e_1, e_2) est ainsi une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{J}_2(\lambda)$ car

$$\begin{aligned} u(e_2) &= \lambda e_2 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) \\ &= \lambda e_2 + e_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda e_1 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_1) \\ &= \lambda e_1 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^2(e_2) \\ &= \lambda e_1. \end{aligned}$$

3. Les valeurs propres de A sont $1 + a$ et $1 - a$; elles sont distinctes si et seulement si $2a \neq 0$, ce qui est le cas si et seulement si le corps K n'est pas de caractéristique 2 et si $a \neq 0$.
- Si le corps K n'est pas de caractéristique 2 et si $a \neq 0$, la matrice A est diagonalisable et
$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Si le corps K est de caractéristique 2 et $a \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - (1+a)\mathrm{I}_2)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la question 2, on obtient
$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Si $a = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.

La matrice B a une unique valeur propre, en l'occurence 1, et elle est donc diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Si $a \neq 0$, il découle de la question 2 que l'on a

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7* — L'endomorphisme $v = u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent : $v^n = 0$.

Pour établir que la famille $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0.$$

En appliquant v^{n-1}, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 v^{n-1}(e_1) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e_{n-1}) + \lambda_n v^{n-1}(e_n) \\ &= \lambda_1 v^{n-1}(v(e_2)) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(v(e_n)) + \lambda_n v^{n-1}(e_n) \\ &= \lambda_n v^{n-1}(e_n) = 0 \end{aligned}$$

puisque $v^n = 0$ et donc $\lambda_n = 0$ puisque, par construction, le vecteur $v^{n-1}(e_n)$ est non nul. Un raisonnement analogue avec v^{n-2} conduit ensuite à $\lambda_{n-1} = 0$ et l'on obtient ainsi de proche en proche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$.

Remarque : on peut, si l'on veut, raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. Il n'y a rien a démontrer si $n = 1$ puisqu'alors $v = 0$ et le vecteur non nul e_1 est une base de E. Si l'on suppose le résultat acquis en dimension n, on l'obtient en dimension $n+1$ grâce au raisonnement précédent : partant d'une relation linéaire $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$, on obtient $\lambda_n = 0$ en appliquant v^{n-1} et nous sommes donc ramenés à une relation entre les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n-1}$; comme $e_{n-2} = v(e_{n-1}), \ \ldots, \ e_1 = v(e_2)$, l'hypothèse de récurrence s'applique dans le sous-espace vectoriel u-stable engendré par ces vecteurs et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

On a par construction

$$u(e_n) = \lambda e_n + (u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_n) = \lambda e_n + e_{n-1}, \ \ldots, \ u(e_2) = \lambda e_2 + (u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_2) = \lambda e_2 + e_1$$

et

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda e_1 + (u - \lambda \mathrm{id}_E)(e_1) \\ &= \lambda e_1 + (u - \lambda \mathrm{id}_E)^n(e_n) \\ &= \lambda e_1, \end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de u dans la base B est effectivement $J_n(\lambda)$.

Exercice 8* — La matrice $A \in M_3(\mathbb{Q})$ admet manifestement -2 pour valeur propre et

$$\mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux autres valeurs propres x, y sont déterminées par les conditions

$$x + y - 2 = \mathrm{tr}(A) = -6 \text{ et } -2xy = \det(A) = -8,$$

de sorte que $x = y = -2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Comme

$$(A + 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

le polynôme minimal de A est $(T+2)^3$ et la réduite de Jordan de A contient un bloc de taille 3 ; celui-ci est nécessairement le seul bloc de Jordan pour des raisons de dimension, de sorte que la réduite de Jordan est la matrice

$$J_3(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice de passage P telle que $A = PJ_3(-2)P^{-1}$ en appliquant l'exercice 7 : quel que soit le vecteur ε dans $\mathbb{Q}^3 - \mathrm{Ker}(A+2I_3)^2$, la famille $((A+2I_3)^2\varepsilon, (A+2I_3)\varepsilon, \varepsilon)$ est une base de $\mathbb{Q}^3$ telle que la matrice de passage correspondante P satisfasse à la condition voulue. Il suffit par exemple de choisir pour ε le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, auquel cas

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B admet manifestement -1 et 2 comme valeurs propres et

$$\mathrm{Ker}(B+I_3) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ \mathrm{Ker}(B-2I_3) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La dernière valeur propre x est déterminée par la condition $x-1+2 = \mathrm{tr}(B) = 0$, soit $x = -1$, et la matrice B n'est donc pas diagonalisable.

Le polynôme minimal de B est $(T+1)^2(T-2)$, de sorte que sa réduite de Jordan possède un bloc $J_1(2)$ de taille 1 et un bloc $J_2(-1)$ de taille 2, et il n'y a pas d'autre bloc pour des raisons de dimension. On obtient une base de Jordan pour B en choisissant un vecteur propre $e_1 \in \mathrm{Ker}(B-2I_3) - \{0\}$ ainsi qu'un vecteur $e_3 \in \mathrm{Ker}(B+I_3)^2 - \mathrm{Ker}(B+I_3)$ et en posant $e_2 = (B+I_3)(e_3)$. Comme

$$(B+I_3)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \\ -18 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

on peut par exemple choisir le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, auquel cas

$$B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \ \text{avec} \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 — 1. La matrice $J_k(\lambda)$ s'écrit sous la forme $J_k(\lambda) = \lambda I_n + N$ où N une matrice nilpotente d'indice n. On a alors ${}^tJ_k(\lambda) = \lambda I_n + {}^t N$ et, la matrice ${}^tN$ étant nilpotente d'indice n, la réduite de Jordan de ${}^tJ_k(\lambda)$ n'est autre que la matrice $J_k(\lambda)$, ce qui prouve que les matrices $J_k(\lambda)$ et ${}^tJ_k(\lambda)$ sont semblables.
Remarque : il est facile d'établir que la matrice $J_k(\lambda)$ et sa conjuguée sont semblables sans recourir au théorème de Jordan. Considérons en effet la matrice Σ ayant des 1 sur l'antidiagonale et des zéros ailleurs ; si $E_1, \ldots, E_n$ sont les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a par définition

$$\Sigma E_i = E_{n-i+1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire $\Sigma E_1 = E_n,\ \Sigma E_2 = E_{n-1}, \ldots, \Sigma E_n = E_1$). Comme, par ailleurs,

$$J_k(\lambda)E_i = \lambda E_i + E_{i-1} \ \ \textit{pour tout } i \in \{2, \ldots, n\} \ \ \textit{et} \ \ J_k(\lambda)E_1 = \lambda E_1,$$

on a

$$J_k(\lambda)\Sigma E_i = J_k(\lambda)E_{n-i+1} = \lambda E_{n-i+1} + E_{n-i} \ \textit{pour tout } i \in \{1, \ldots, n-1\} \ \ \textit{et} \ \ J_k(\lambda)E_n = \lambda E_1$$

et donc

$$J_k(\lambda)\Sigma E_i = \lambda \Sigma E_i + \Sigma E_{i+1} \ \ \textit{pour tout } i \in \{1, \ldots, n-1\} \ \ \textit{et} \ \ J_k(\lambda)\Sigma E_n = \lambda \Sigma E_n,$$

ce qui est équivalent à l'identité

$$\Sigma^{-1}J_k(\lambda)\Sigma = {}^t J_k(\lambda).$$

Nous avons ainsi re-démontré que les matrices $J_k(\lambda)$ et ${}^tJ_k(\lambda)$ sont semblables.

2. Soit A une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice formée de blocs de Jordan diagonaux :

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(J_p(\lambda))_{(\lambda,p)\in \mathrm{Sp}(A)\times\mathscr{P}_\lambda}$$

où, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $\mathscr{P}_\lambda$ est une certaine famille finie d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

La matrice ${}^t(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})$ est égale à $\mathrm{diag}({}^t\mathrm{J}_p(\lambda))_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\times\mathscr{P}_\lambda}$. D'après ce qui précède, il existe pour tout couple $(\lambda, p) \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \times \mathscr{P}_\lambda$ une matrice $\mathrm{P}_{(\lambda,p)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\mathrm{J}_p(\lambda) = \mathrm{P}_{(\lambda,p)}^{-1}\mathrm{J}_p(\lambda)\mathrm{P}_{(\lambda,p)}$; si l'on pose

$$\mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\times\mathscr{P}_\lambda},$$

alors $\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathrm{P}_{(\lambda,p)}^{-1})_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\times\mathscr{P}_\lambda}$ et

$$\begin{aligned} {}^t(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) &= \mathrm{diag}(\mathrm{P}_{(\lambda,p)}^{-1}\mathrm{J}_p(\lambda)\mathrm{P}_{(\lambda,p)})_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\times\mathscr{P}_\lambda} \\ &= \mathrm{Q}^{-1}\,\mathrm{diag}(\mathrm{J}_p(\lambda))_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\times\mathscr{P}_\lambda}\mathrm{Q} \\ &= \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APQ} = (\mathrm{PQ})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PQ}). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité ${}^t(\mathrm{P}^{-1}) = ({}^t\mathrm{P})^{-1}$ — que l'on établit en transposant la relation $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ —, on obtient finalement $({}^t\mathrm{P}){}^t\mathrm{A}({}^t\mathrm{P})^{-1} = (\mathrm{PQ})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PQ})$, soit encore

$${}^t\mathrm{A} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS} \ \text{ avec } \ \mathrm{S} = \mathrm{PQ}{}^t\mathrm{P}$$

et la matrice A est ainsi semblable à sa transposée.