Structure des endomorphismes nilpotents - Réduite de Jordan

Exercice 1* — 1. La condition $u^2 = 0$ est équivalente à l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u étant supposé non nul, $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel strict de E et $\mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$; on a donc

$$\dim \mathrm{Ker}(u) < \dim \mathrm{E} = 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \dim \mathrm{Im}(u),$$

ce qui implique que l'inclusion initiale soit une égalité : $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim \mathrm{Ker}(u)$.

2. Soit e_2 un vecteur dans $\mathrm{E} - \mathrm{Ker}(u)$ et soit $e_1 = u(e_2)$. La famille (e_1, e_2) est libre : quels que soient les scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, on obtient $\lambda_2 u(e_2) = 0$ en appliquant u et donc $\lambda_2 = 0$ puisque, par construction, le vecteur $e_1 = u(e_2)$ est non nul ; on a ainsi $\lambda_1 e_1 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$ par le même argument que précédemment. Nous venons de construire une base de E dans laquelle la matrice de u est celle que l'on souhaite puisque $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$.

3. On vérifie immédiatement que les matrices $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ de déterminant nul sont nilpotentes. Réciproquement, si une matrice non nulle $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ est nilpotente, il découle de la question précédente qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; on a alors

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} -\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & \alpha\gamma \end{pmatrix}$$

et M est de la forme annoncée.

Remarque : il serait préférable d'observer qu'une matrice $M \in M_2(K)$ est nilpotente si et seulement si son polynôme carctéristique est égal à T^2, c'est-à-dire si et seulement si la trace et le déterminant de M sont nuls ; il en découle immédiatement que M est de la forme requise.

Exercice 2* — 1. La condition $u^2 = 0$ est équivalente à l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u étant par hypothèse de rang r, il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_r \in \mathrm{E}$ tels que $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ soit une base de $\mathrm{Im}(u)$; comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on peut compléter cette dernière en une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$ — de dimension $n - r$ — en adjoignant des vecteurs convenables $v_{r+1}, \ldots, v_{n-r}$.

2. La famille $\mathrm{B} = (u(e_1), e_1, u(e_2), e_2, \ldots, u(e_r), e_r, v_{r+1}, \ldots, v_{n-r})$ contenant $n = \dim \mathrm{E}$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour établir qu'il s'agit d'une base de E. Étant donnés des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_{n-r} \in \mathrm{K}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) + \mu_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0,$$

on obtient

$$\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_r u(e_r) = 0$$

en appliquant u, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ puisque la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est libre, puis

$$\mu_1 u(e_1) + \ldots + \mu_r u(e_r) + \mu_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0$$

et donc $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$; la famille B est libre.

3. Chacun des sous-espaces $\mathrm{K}u(e_i) \oplus \mathrm{K}e_i$, $1 \leq i \leq r$, et $\mathrm{K}v_j$, $r + 1 \leq j \leq n - r$, est stable par u. La matrice de u dans la base B est par conséquent diagonale par blocs, formée des r blocs de taille 2

$$\mathrm{Mat}(u,\ (u(e_i), e_i)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leq i \leq r$, et des $n - 2r$ blocs de taille 1

$$\mathrm{Mat}(u,\ (v_j)) = (0),$$

$r + 1 \leq j \leq n - r$.

Remarque. On vient de re-démontrer un cas particulier du théorème de structure des endomorphismes nilpotents : étant donné un endomorphisme u de E de polynôme minimal T^2, il existe une base de E dans laquelle *la matrice de u est diagonale par blocs et constituée de blocs de Jordan $J_p(O)$ de taille p avec $p \in \{1,2\}$; désignant respectivement par n_1 et n_2 le nombre de blocs $J_1(0)$ et $J_2(0)$, on a en outre*

$$n_1 + 2n_2 = \dim E \textit{ et } n_1 + n_2 = \dim Ker(u),$$

donc $n_2 = \dim E - \dim Ker(u) = \dim Im(u)$.

Exercice 3* — 1. La réduite de Jordan d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^4$ est une matrice diagonale par blocs formée de blocs de Jordan $\mathrm{J}_p(0)$ de taille $p \leq 4$. Désignant par n_p le nombre de blocs de taille p, une telle matrice existe si et seulement si

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 4,$$

c'est-à-dire si et seulement si (n_1, n_2, n_3, n_4) est l'un des quadruplets

$$(0,0,0,4),\ (1,0,1,0),\ (0,2,0,0),\ (2,1,0,0),\ (4,0,0,0);$$

les matrices correspondantes sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant les notations qui précèdent, le polynôme minimal de l'endomorphisme nilpotent u est T^p, où $p \in \{1,2,3,4\}$ est le plus grand entier tel que $n_p \neq 0$. On obtient ainsi respectivement $\mathrm{T}^4,\ \mathrm{T}^3,\ \mathrm{T}^2,\ \mathrm{T}^2$ et T pour les cinq matrices précédentes et il en ressort que les troisième et quatrième matrices ont le même polynôme minimal bien qu'elles ne soient pas semblables.

Exercice 4* — Étant données deux matrices M et M$'$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés, il a été démontré en cours que M et M$'$ sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes réduites de Jordan à une permutation des blocs près ; en particulier, deux matrices sous forme de Jordan sont semblables si et seulement si elles sont égales à une permutation des blocs près.

Soit M une matrice sous forme de Jordan et soit M$'$ la matrice diagonale définie par la diagonale de M ; M$'$ est bien évidemment sous forme de Jordan. La matrice M étant triangulaire supérieure, elle est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à la matrice M$'$; d'après ce que l'on vient de dire, cela est le cas si et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, donc si et seulement si M est diagonale.

Remarque : étant donnée une matrice M sous la forme de Dunford-Jordan : $M = D + N$, où D est une matrice diagonalisable, N est une matrice nilpotente et $DN = ND$, la matrice M *est diagonalisable si et seulement si $N = 0$. Cette condition est bien évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit observer que les matrices M et D commutent et admettent donc une base commune de diagonalisation ; il en découle que la matrice $N = M - D$ s'écrit sous forme diagonale dans cette base et donc $N = 0$ puisqu'une matrice nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.*

Exercice 5* — 1. En examinant les blocs de Jordan possibles (cf. exercice 3), on voit qu'il y a trois classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1},\ \mathrm{P}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Les polynômes minimaux correspondant sont $\mathrm{T}^3,\ \mathrm{T}^2$ et T, de sorte que deux matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal.

2. Le polynôme minimal de la matrice A divise son polynôme caractéristique et donc est de la forme

$$(\mathrm{X} - \lambda_1)^{m_1} \dots (\mathrm{X} - \lambda_p)^{m_p}$$

avec $1 \leq m_i \leq h_i \leq 3$. On en déduit que la réduite de Jordan de la matrice A est constituée de blocs de Jordan $J_k(\lambda_i)$, avec $1 \leq k \leq m_i$ $(1 \leq i \leq p)$.

Étant donnés $i \in \{1, \dots, p\}$ et $k \in \{1, \dots, m_i\}$, désignons par $n_k(\lambda_i)$ le nombre de blocs de Jordan $\mathrm{J}_k(\lambda_i)$ figurant dans la réduite de Jordan de A. Quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$, le calcul du polynôme caractéristique montre que l'on a

$$\sum_{k=1}^{m_i} k n_k(\lambda_i) = h_i \ ;$$

comme $m_i \leq h_i \leq 3$, les seuls cas possibles sont les suivants :
- $m_i = 1$, $n_1(\lambda_i) = h_i$;
- $m_i = 2$, $n_2(\lambda_i) = 1$, $n_1(\lambda_i) = h_i - m_i$,
- $m_i = 3$, $n_3(\lambda_i) = 1$, $n_1(\lambda_i) = n_2(\lambda_i) = 0$.

On constate ainsi que la réduite de Jordan de A est totalement déterminée par la donnée des entiers $h_1, m_1, \dots, h_p, m_p$ — c'est-à-dire par les polynômes caractéristique et minimal de A — et toute matrice $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les mêmes polynômes caractéristique et minimal que A a la même réduite de Jordan que A et donc est semblable à A.

Exercice 6* — 1. Le polynôme minimal m_u de l'endomorphisme u est scindé puisqu'il divise son polynôme caractéristique. L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable si et seulement si m_u possède une racine multiple, donc si et seulement si $m_u = (\mathrm{T} - \lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La réduite de Jordan de u contient alors un bloc de Jordan $\mathrm{J}_2(\lambda)$ de taille 2 et c'est nécessairement l'unique bloc de Jordan qui puisse apparaître pour des raisons de dimension.

2. Soit e_2 un vecteur de E tel que $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2) \neq 0$. Posant $e_1 = (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2)$, la famille (e_1, e_2) est libre : en effet, si λ_1 et λ_2 sont des scalaires tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, on obtient

$$0 = \lambda_1 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_1) + \lambda_2 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2) = \lambda_1 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})^2(e_2) + \lambda_2 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2) = \lambda_2 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2),$$

donc $\lambda_2 = 0$ puisque $(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2) \neq 0$, puis

$$0 = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2)$$

et donc $\lambda_1 = 0$ pour la même raison.

La famille (e_1, e_2) est ainsi une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{J}_2(\lambda)$ car

$$\begin{aligned} u(e_2) &= \lambda e_2 + (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_2) \\ &= \lambda e_2 + e_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda e_1 + (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})(e_1) \\ &= \lambda e_1 + (u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})^2(e_2) \\ &= \lambda e_1. \end{aligned}$$

3. Les valeurs propres de A sont $1 + a$ et $1 - a$; elles sont distinctes si et seulement si $2a \neq 0$, ce qui est le cas si et seulement si le corps K n'est pas de caractéristique 2 et si $a \neq 0$.
- Si le corps K n'est pas de caractéristique 2 et si $a \neq 0$, la matrice A est diagonalisable et
$$\mathrm{A} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Si le corps K est de caractéristique 2 et $a \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - (1+a)\mathrm{I}_2)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la question 2, on obtient
$$\mathrm{A} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Si $a = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$.

La matrice B a une unique valeur propre, en l'occurence 1, et elle est donc diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Si $a \neq 0$, il découle de la question 2 que l'on a

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{P} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7* — L'endomorphisme $v = u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est nilpotent : $v^n = 0$.

Pour établir que la famille $\mathrm{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{K}$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0.$$

En appliquant v^{n-1}, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 v^{n-1}(e_1) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e_{n-1}) + \lambda_n v^{n-1}(e_n) \\ &= \lambda_1 v^{n-1}(v(e_2)) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(v(e_n)) + \lambda_n v^{n-1}(e_n) \\ &= \lambda_n v^{n-1}(e_n) = 0 \end{aligned}$$

puisque $v^n = 0$ et donc $\lambda_n = 0$ puisque, par construction, le vecteur $v^{n-1}(e_n)$ est non nul. Un raisonnement analogue avec v^{n-2} conduit ensuite à $\lambda_{n-1} = 0$ et l'on obtient ainsi de proche en proche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_1 = 0$.

Remarque : on peut, si l'on veut, raisonner par récurrence sur $n \geq 1$. Il n'y a rien a démontrer si $n = 1$ puisqu'alors $v = 0$ et le vecteur non nul e_1 est une base de E. Si l'on suppose le résultat acquis en dimension n, on l'obtient en dimension $n+1$ grâce au raisonnement précédent : partant d'une relation linéaire $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e_{n-1} + \lambda_n e_n = 0$, on obtient $\lambda_n = 0$ en appliquant v^{n-1} et nous sommes donc ramenés à une relation entre les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$; comme $e_{n-2} = v(e_{n-1}),\ \ldots,\ e_1 = v(e_2)$, l'hypothèse de récurrence s'applique dans le sous-espace vectoriel u-stable engendré par ces vecteurs et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

On a par construction

$$u(e_n) = \lambda e_n + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_n) = \lambda e_n + e_{n-1},\ \ldots,\ u(e_2) = \lambda e_2 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_2) = \lambda e_2 + e_1$$

et

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda e_1 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})(e_1) \\ &= \lambda e_1 + (u - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})^n(e_n) \\ &= \lambda e_1, \end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de u dans la base B est effectivement $\mathrm{J}_n(\lambda)$.

Exercice 8* — La matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ admet manifestement -2 pour valeur propre et

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux autres valeurs propres x, y sont déterminées par les conditions

$$x + y - 2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -6 \text{ et } -2xy = \det(\mathrm{A}) = -8,$$

de sorte que $x = y = -2$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Comme

$$(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

le polynôme minimal de A est $(\mathrm{T}+2)^3$ et la réduite de Jordan de A contient un bloc de taille 3 ; celui-ci est nécessairement le seul bloc de Jordan pour des raisons de dimension, de sorte que la réduite de Jordan est la matrice

$$\mathrm{J}_3(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice de passage P telle que $A = PJ_3(-2)P^{-1}$ en appliquant l'exercice 7 : quel que soit le vecteur ε dans $\mathbb{Q}^3 - \mathrm{Ker}(A+2I_3)^2$, la famille $((A+2I_3)^2\varepsilon, (A+2I_3)\varepsilon, \varepsilon)$ est une base de $\mathbb{Q}^3$ telle que la matrice de passage correspondante P satisfasse à la condition voulue. Il suffit par exemple de choisir pour ε le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, auquel cas

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B admet manifestement -1 et 2 comme valeurs propres et

$$\mathrm{Ker}(B+I_3) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(B-2I_3) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La dernière valeur propre x est déterminée par la condition $x-1+2 = \mathrm{tr}(B) = 0$, soit $x = -1$, et la matrice B n'est donc pas diagonalisable.

Le polynôme minimal de B est $(T+1)^2(T-2)$, de sorte que sa réduite de Jordan possède un bloc $J_1(2)$ de taille 1 et un bloc $J_2(-1)$ de taille 2, et il n'y a pas d'autre bloc pour des raisons de dimension. On obtient une base de Jordan pour B en choisissant un vecteur propre $e_1 \in \mathrm{Ker}(B-2I_3) - \{0\}$ ainsi qu'un vecteur $e_3 \in \mathrm{Ker}(B+I_3)^2 - \mathrm{Ker}(B+I_3)$ et en posant $e_2 = (B+I_3)(e_3)$. Comme

$$(B+I_3)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \\ -18 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

on peut par exemple choisir le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, auquel cas

$$B = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 — La matrice A admet 1 comme valeur propre évidente (les première et dernière colonnes de $A - I_4$ sont égales) et

$$\mathrm{Ker}(A-I_4) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a d'autre part $\mathrm{tr}(A) = 7$ et $\det(A) = 8$, ce qui suggère que les trois valeurs propres restantes sont égales à 2. Tel est bien le cas car 2 est effectivement une valeur propre puisque

$$\mathrm{Ker}(A-2I_4) = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les deux valeurs propres restantes, déterminées par les conditions $x+y = 4$ et $xy = 4$ sont égales à 2. Le polynôme caractéristique de A est donc $(T-1)(T-2)^3$.

Les sous-espaces caractéristiques de A sont $\mathrm{Ker}(A-I_4)$ — de dimension 1 — et $\mathrm{Ker}(A-2I_4)^3$ — de dimension 3. Vu que

$$(A-2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & -1 \\ 24 & 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -25 & 10 & -23 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-2I_4)^3 = \begin{pmatrix} -48 & -49 & 10 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 49 & -10 & 47 \end{pmatrix},$$

le sous-espace $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)^i$ est de dimension i pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et le polynôme minimal de A coïncide donc avec son polynôme caractéristique (rappelons que la multiplicité de $(\mathrm{T}-2)$ dans le polynôme minimal de A est le plus petit entier p à partir duquel la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_4)^p$ devient constante). Nous pouvons d'emblée en déduire que la matrice réduite de Jordan de A contient un bloc $\mathrm{J}_1(1)$ et un bloc $\mathrm{J}_3(2)$; comme il n'y a plus de place disponible, ce sont les seuls blocs et cette matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une base de Jordan de A, il suffit de choisir des vecteurs non nuls $\mathrm{E}_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)$ et $\mathrm{E}_4 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_4)^3 - \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_E)^2$ puis de poser $\mathrm{E}_3 = (\mathrm{A}-2\mathrm{I}_4)\mathrm{E}_4$ et $\mathrm{E}_2 = (\mathrm{A}-2\mathrm{I})^2\mathrm{E}_4$ (cf. exercice 7). On peut par exemple considérer

$$\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -49 \\ 48 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(pour obtenir E_4, il suffit de choisir ses coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 telles que $48x_1 + 49x_2 - 10x_3 + 47x_4 = 0$ et $x_2 - 10x_3 - x_4 \neq 0$) ; dans ce cas, la matrice de passage est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 48 & -50 & -49 \\ 0 & -24 & -5 & 48 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & -24 & 55 & 0 \end{pmatrix}.$$

On procède de même avec B en commençant par vérifier que ses valeurs propres sont -1 et -3, son polynôme caractéristique étant $(\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}+3)^3$. On obtient

$$\mathrm{B} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -8 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 — 1. La matrice $\mathrm{J}_k(\lambda)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{J}_k(\lambda) = \lambda \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ où N une matrice nilpotente d'indice n. On a alors ${}^t\mathrm{J}_k(\lambda) = \lambda \mathrm{I}_n +^t \mathrm{N}$ et, la matrice ${}^t\mathrm{N}$ étant nilpotente d'indice n, la réduite de Jordan de ${}^t\mathrm{J}_k(\lambda)$ n'est autre que la matrice $\mathrm{J}_k(\lambda)$, ce qui prouve que les matrices $\mathrm{J}_k(\lambda)$ et ${}^t\mathrm{J}_k(\lambda)$ sont semblables.

Remarque : il est facile d'établir que la matrice $J_k(\lambda)$ et sa conjuguée sont semblables sans recourir au théorème de Jordan. Considérons en effet la matrice Σ ayant des 1 sur l'antidiagonale et des zéros ailleurs ; si $E_1, \ldots, E_n$ sont les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a par définition

$$\Sigma E_i = E_{n-i+1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire $\Sigma E_1 = E_n$, $\Sigma E_2 = E_{n-1}, \ldots, \Sigma E_n = E_1$). Comme, par ailleurs,

$$J_k(\lambda)E_i = \lambda E_i + E_{i-1} \;\; \textit{pour tout } i \in \{2, \ldots, n\} \;\; \textit{et} \;\; J_k(\lambda)E_1 = \lambda E_1,$$

on a

$$J_k(\lambda)\Sigma E_i = J_k(\lambda)E_{n-i+1} = \lambda E_{n-i+1} + E_{n-i} \; \textit{pour tout } i \in \{1, \ldots, n-1\} \;\; \textit{et} \;\; J_k(\lambda)E_n = \lambda E_1$$

et donc

$$J_k(\lambda)\Sigma E_i = \lambda \Sigma E_i + \Sigma E_{i+1} \;\; \textit{pour tout } i \in \{1, \ldots, n-1\} \;\; \textit{et} \;\; \mathrm{J}_k(\lambda)\Sigma E_n = \lambda \Sigma E_n,$$

ce qui est équivalent à l'identité

$$\Sigma^{-1} J_k(\lambda) \Sigma =^t J_k(\lambda).$$

Nous avons ainsi re-démontré que les matrices $J_k(\lambda)$ et ${}^tJ_k(\lambda)$ sont semblables.

2. Soit A une matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit une matrice formée de blocs de Jordan diagonaux :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_p(\lambda))_{(\lambda,p) \in \mathrm{Sp(A)} \times \mathscr{P}_\lambda}$$

où, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$, $\mathscr{P}_\lambda$ est une certaine famille finie d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

La matrice ${}^t(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})$ est égale à $\mathrm{diag}({}^t\mathrm{J}_p(\lambda))_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda}$. D'après ce qui précède, il existe pour tout couple $(\lambda,p)\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda$ une matrice $\mathrm{P}_{(\lambda,p)}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\mathrm{J}_p(\lambda)=\mathrm{P}^{-1}_{(\lambda,p)}\mathrm{J}_p(\lambda)\mathrm{P}_{(\lambda,p)}$; si l'on pose

$$\mathrm{Q}=\mathrm{diag}(\mathrm{P}_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda},$$

alors $\mathrm{Q}^{-1}=\mathrm{diag}(\mathrm{P}^{-1}_{(\lambda,p)})_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda}$ et

$$\begin{aligned}{}^t(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) &= \mathrm{diag}(\mathrm{P}^{-1}_{(\lambda,p)}\mathrm{J}_p(\lambda)\mathrm{P}_{(\lambda,p)})_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda}\\ &= \mathrm{Q}^{-1}\,\mathrm{diag}(\mathrm{J}_p(\lambda))_{(\lambda,p)\in\mathrm{Sp(A)}\times\mathscr{P}_\lambda}\mathrm{Q}\\ &= \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APQ}=(\mathrm{PQ})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PQ}).\end{aligned}$$

En utilisant l'identité ${}^t(\mathrm{P}^{-1})=({}^t\mathrm{P})^{-1}$ — que l'on établit en transposant la relation $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}=\mathrm{I}_n$ —, on obtient finalement $({}^t\mathrm{P}){}^t\mathrm{A}({}^t\mathrm{P})^{-1}=(\mathrm{PQ})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{PQ})$, soit encore

$${}^t\mathrm{A}=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}\ \text{ avec }\ \mathrm{S}=\mathrm{PQ}{}^t\mathrm{P}$$

et la matrice A est ainsi semblable à sa transposée.

Exercice 11 — 1. La matrice considérée s'écrit sous la forme $a\mathrm{I}_3+\mathrm{N}$, où N est une matrice nilpotente d'indice 3 ; sa réduite de Jordan est donc la matrice $\mathrm{J}_3(a)$.

2.1. Vérification immédiate.

2.2. Comme $\mathrm{B}^3=a\mathrm{I}_3$, le polynôme caractéristique de la matrice B est $a-\mathrm{T}^3$ et ses valeurs propres sont donc les trois racines cubiques de a dans $\mathbb{C}$, soit α, $j\alpha$ et $j^2\alpha$, où $\alpha=a^{1/3}$ est l'unique racine cubique *réelle* de a et $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (rappelons que 1, j et $j^2=\overline{j}$ sont les trois racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$). La matrice B est en particulier diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ et sa réduite de Jordan est donc la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha,j\alpha,j^2\alpha)$.

2.3. Dans une base de diagonalisation de B, les matrices B^2 et B^3 s'écrivent respectivement $\mathrm{diag}(\alpha^2,j^2\alpha^2,j\alpha^2)$ et $\mathrm{diag}(a,a,a)$; A s'écrit donc sous la forme $\mathrm{diag}(\alpha+\alpha^2+a,j\alpha+j^2\alpha^2+a,j^2\alpha+j\alpha^2+a)$ dans cette même base. La matrice A est ainsi diagonalisable et sa réduite de Jordan est la matrice

$$\mathrm{diag}(\alpha+\alpha^2+a,j\alpha+j^2\alpha^2+a,j^2\alpha+j\alpha^2+a).$$

3. Puisque $b\neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & a & a\\ b & a & a\\ b & b & a\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}\frac{a}{b} & \frac{a}{b} & \frac{a}{b}\\ 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{b}\\ 1 & 1 & \frac{a}{b}\end{pmatrix}.$$

Comme $a\neq 0$, il découle de la question précédente que la matrice de droite est diagonalisable, de valeurs propres $b(\alpha+\alpha^2+\frac{a}{b}),b(j\alpha+j^2\alpha^2+\frac{a}{b})$ et $b(j^2\alpha+j\alpha^2+\frac{a}{b})$ où α désigne l'unique racine cubique réelle de $\frac{a}{b}$; la réduite de Jordan de la matrice de gauche est donc $\mathrm{diag}(b\alpha+b\alpha^2+a,jb\alpha+j^2b\alpha+a,j^2b\alpha+jb\alpha^2+a)$. (*Remarque : $b\alpha,jb\alpha$ et $j^2b\alpha$ sont les trois racines cubiques de ab^2 dans* $\mathbb{C}$.)

Exercice 12 — 1.1. Soit $p\geq 1$ un entier tel que $u^p=0$. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u divise le polynôme annulateur X^p, donc est de la forme X^m avec $1\leq m\leq p$. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ayant les mêmes facteurs irréductibles que son polynôme minimal, il en découle que le polynôme caractéristique de u est $-\mathrm{X}^3$, le degré et le signe provenant directement de la définition $\mathrm{P}_u=\det(u-\mathrm{X}\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

1.2. Le polynôme minimal de u est X^m, où m est le plus petit des entiers naturels p tel que $u^p=0$. D'après le théorème de structure des endomorphismes nilpotents, la réduite de Jordan de u n'est formée que de blocs de Jordan $\mathrm{J}_r(0)$ avec $r\leq m$ et elle contient au moins un bloc de taille maximale $\mathrm{J}_m(0)$; ce sont les seules conditions requises.

- Si $m=1$, $u=0$ et la réduite de Jordan de u est la matrice nulle, que l'on peut voir comme une matrice diagonale par blocs ne comportant que des blocs $\mathrm{J}_1(0)$ $(=(0)\in\mathrm{M}_1(\mathrm{K}))$.
- Si $m=2$, la réduite de Jordan de u contient nécessairement un bloc $\mathrm{J}_2(0)$; comme c'est une matrice de taille 3, il n'a plus de place que pour un bloc $\mathrm{J}_1(0)$ et la matrice obtenue est donc

$$\mathrm{diag}(\mathrm{J}_1(0),\mathrm{J}_2(0))=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

– Si enfin $m = 3$, la réduite de Jordan de u contient un bloc $\mathrm{J}_3(0)$ et, puisqu'il s'agit d'une matrice de taille 3, c'est exactement la matrice

$$\mathrm{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Si le polynôme minimal de u est X^3, $u^2 \neq 0$ et $\mathrm{Ker}(u^2)$ est donc un sous-espace vectoriel strict de $\mathrm{Ker}(u^3) = \mathrm{E}$. Quel que soit alors le vecteur x dans $\mathrm{E} - \mathrm{Ker}(u^2)$, la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de E. Il suffit en effet de vérifier qu'il s'agit d'une famille libre, ce qui est immédiat : une relation linéaire

$$\lambda x + \mu u(x) + \nu u^2(x) = 0$$

implique $\lambda u^2(x) = 0$ en appliquant u^2 — donc $\lambda = 0$ puisque $u^2(x) \neq 0$ par hypothèse — puis $\mu u^2(x) = 0$ en appliquant u — donc $\mu = 0$ — et finalement $\nu u^2(x) = 0$ — donc $\nu = 0$.

1.4. La matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1. Vérification immédiate : $(\mathrm{J}(\lambda) - \lambda \mathrm{I}_3)^2 = 0$.

2.2. Il suffit de choisir une base de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme nilpotent $u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}$ est $\mathrm{J}(0)$; d'après les questions 1.3 et 1.4, cela se fait simplement en choisissant un vecteur x dans

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^3 - \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2 = \mathrm{E} - \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2$$

et en considérant la famille $((u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})^2(x), (u - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})(x), x)$ (dans cet ordre si l'on veut que les 1 apparaissent *au-dessus* de la diagonale !).

3.1. Il est manifeste que -2 est une valeur propre de A ; comme $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = -6$ et $\det(\mathrm{A}) = -8$, les deux autres valeurs propres de A sont déterminées par les conditions $x + y = -4$ et $xy = 4$, soit $x = y = -2$. Le polynôme caractéristique de A est donc $-(\mathrm{X}+2)^3$.

Le polynôme minimal de A est $(\mathrm{X}+2)^m$ avec $1 \leq m \leq 3$; la matrice

$$(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

n'étant pas nulle, le polynôme minimal de u est $(\mathrm{X}+2)^3$.

3.2. La matrice réduite de Jordan de u contient nécessairement un bloc $\mathrm{J}_3(-2)$; comme il n'y a plus de place disponible, c'est exactement la matrice $\mathrm{J}_3(-2)$.

3.3. D'après la question 2.2, on obtient une base de Jordan de u en considérant une famille de la forme $((u + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x), (u + 2\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(x), x)$, où x est un vecteur quelconque dans $\mathbb{R}^3 - \mathrm{Ker}(u + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Comme $\mathrm{Ker}(u + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ est le plan d'équation $x_1 - x_3 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur ${}^t(1, 0, 0)$ convient et la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de Jordan de u.