Une proposition pour l'examen du lundi 7 janvier 2008

Exercice Soit K un corps commutatif et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie d. Un endomorphisme u de E est dit *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ soit une base de E ; on dira également qu'un tel vecteur x est *cyclique*.

Étant donné un endomorphisme u de E, on désigne par m_u son polynôme minimal et par P_u son polynôme caractéristique ; on rappelle que, par convention, le coefficient dominant de P_u est $(-1)^d$.

1. Soit u un endomorphisme cyclique de E.

1.1. Démontrer que, si un polynôme non nul $\mathrm{Q} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ annule u, alors $\deg(\mathrm{Q}) \geq d$.

1.2. En déduire que l'on a $m_u = (-1)^d \mathrm{P}_u$.

2. Soit n un endomorphisme nilpotent de E et soit $\lambda \in \mathrm{K}$; on pose $u = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}} + n$.

2.1. Démontrer que l'endomorphisme n est cyclique si et seulement si $n^{d-1} \neq 0$.

2.2. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer u^k en fonction des puissances de n.

2.3. En déduire que l'endomorphisme u est cyclique si et seulement si l'endomorphisme n est cyclique.

3. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur K. Quelle que soit la valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ de u, on désigne $\mathrm{E}(\lambda)$ le sous-espace caractéristique de u associé à λ et on note π_λ le projecteur spectral sur $\mathrm{E}(\lambda)$.

3.1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Si l'endomorphisme u est cyclique, démontrer que sa restriction au sous-espace caractéristique $\mathrm{E}(\lambda)$ est un endomorphisme cyclique de $\mathrm{E}(\lambda)$.

3.2. Étant donné un sous-espace vectoriel F de E stable par u, démontrer que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ si et seulement si $\pi_\lambda(\mathrm{F}) = \mathrm{E}(\lambda)$ pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

3.3. En déduire que, si la restriction de u à chaque sous-espace caractéristique $\mathrm{E}(\lambda)$ est un endomorphisme cyclique de $\mathrm{E}(\lambda)$, alors u est un endomorphisme cyclique. (*Indication éventuelle : considérer un vecteur de la forme* $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$ *où, pour tout* λ, x_λ *est un vecteur cyclique de* $\mathrm{E}(\lambda)$.)

4. Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur K. Démontrer u est un endomorphisme cyclique si et seulement si $m_u = (-1\ ^d \mathrm{P}_u$.