KHÔLLE 10 - MERCREDI 28 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit f une fonction réelle 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Donner l'expression des coefficients a_n et b_n de la série de Fourier $\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ de f.
2. Énoncer le théorème de Parseval-Bessel pour f.

Exercice 1 (5 points) — Calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\cos(\frac{2\pi n}{3})z^n.$$

(*Indication : utiliser le fait que* $\cos(\vartheta)$ *est la partie réelle du nombre complexe* $e^{i\vartheta}$.)

Exercice 2 (5 points) — Développer la fonction $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$ en série entière sur le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<2\}$.

Exercice 3 (5 points) — Soit f la fonction réelle définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Démontrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
2. En déduire le développement en série entière de f.

KHÔLLE 10 - MERCREDI 28 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Expliquer, en donnant les justifications nécessaires, quelle est l'interprétation géométrique des séries de Fourier.

Exercice 1 (5 points) — Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} z^n$$

puis calculer sa somme.

Exercice 2 (4 points) — Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vrai ou fausse puis donner une démonstration ou un contre-exemple.

(i) Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$ ont le même disque de convergence.

(ii) Une série entière $\sum_n a_n z^n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{C}$ si et seulement si c'est un polynôme.

Exercice 3 (6 points) — 1. Démontrer l'identité

$$\int_0^1 t^n (\log t)^n \mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

pour tout entier naturel n.

2. En déduire

$$\int_0^1 t^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1} n^{-n}.$$

(*Utiliser la série entière de la fonction exponentielle puis le théorème d'intégration des séries de fonctions uniformément convergentes...*)

KHÔLLE 10 - MERCREDI 28 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ (la somme d') une série trigonométrique à coefficients complexes, que l'on suppose uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Quels sont les coefficients de Fourier de la fonction f ? Le démontrer.

Exercice 1 (5 points) — On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence ainsi que l'ensemble des points z de $\mathbb{C}$ en lesquels la série est simplement convergente.

2. Calculer la somme de cette série entière.

Exercice 2 (5 points) — Développer la fonction complexe $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$ en série entière au voisinage de 0 ; on utilisera pour cela l'identité $z = (1-z-z^2)f(z)$. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

Exercice 3 (5 points) — Soit (a_n) la suite définie par récurrence par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$$

pour tout $n \geq 2$.

1. Établir la majoration $|a_n| \leq 2^n$ pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire quant au rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n x^n$?

2. Soit $f :]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\to \mathbb{R}$ la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$. Démontrer que cette fonction est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; en déduire une expression simple de f ainsi que la valeur de R.