KHÔLLE 11 - MERCREDI 5 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et intégrable.

1. Rappeler l'expression des coefficients de Fourier réels (a_n et b_n) et complexes (c_n) de f.
2. Rappeler l'inégalité de Bessel. Que peut-on en déduire pour les séries $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ et $\sum_{n\geq 0} b_n^2$?
3. Rappeler l'égaltié de Parseval.

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est définie par $f(x)=x$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Déterminer la somme des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Deuxième exercice — Soit g une fonction 2π-périodique de classe C^1. Démontrer que l'équation différentielle $f''+f'-f=g$ admet une unique solution 2π-périodique puis exprimer cette dernière sous la forme d'une série trigonométrique.

Troisième exercice — Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On note c_n le coefficient de Fourier complexe de f d'indice $n\in\mathbb{Z}$.

1. Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2$ est convergente.

2. Démontrer l'inégalité

$$0 \leq \left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} n^2|c_n|^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} |c_n|\right)t + \left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} \frac{1}{n^2}\right)$$

pour tout entier $\mathrm{N}\geq 1$ et tout nombre réel t.

3. Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge et que l'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| \leq |c_0| + \pi\frac{\sqrt{3}}{3}||f'||,$$

où $||f'|| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

KHÔLLE 11 - MERCREDI 5 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques et intégrables.

Expliquer, en fournissant les justifications nécessaires, quelle est l'interprétation géométrique des séries de Fourier que l'on peut donner en utilisant l'espace vectoriel $\mathscr{F}$.

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est définie par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Déterminer la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Deuxième exercice — Soit f une fonction réelle et 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Démontrer que l'on a
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 \mathrm{d}x$$
et étudier le cas d'égalité.

Troisième exercice — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable. On note c_n le coefficient de Fourier complexe de f d'indice $n \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer l'identité
$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} \mathrm{d}x$$
puis en déduire la majoration
$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right| \mathrm{d}x$$
pour tout entier $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

2. Supposons que la fonction f soit continue. Déduire de ce qui précède que $|c_n|$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$. Aurait-on pu déduire cette propriété des coefficients de Fourier de l'un des résultats du cours ?

3. Supposons que la fonction f soit continuement dérivable. Démontrer que l'on a
$$c_n = o\left(\frac{1}{|n|}\right)$$
lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.

KHÔLLE 11 - MERCREDI 5 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable.

1. Définir les coefficients de Fourier réels et complexes de la fonction f. Comment lit-on sur ces derniers que la fonction f est paire ou impaire ?

2. Sous quelles hypothèses peut-on affirmer que f est la somme de sa série de Fourier ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle paire et 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $[0,\pi]$ est définie par $f(x) = x$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. Déterminer la somme des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Deuxième exercice — Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes tels que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ soit convergente. Démontrer qu'il existe une fonction continue et 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont c_n soit le coefficient de Fourier (complexe) d'indice n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Troisième exercice — Soit (λ_n) une suite décroissante de nombre réels convergeant vers 0.

1. Étant donnés des entiers naturels p et q tels que $p \leq q$, établir l'inégalité

$$\left| \sum_{n=p}^{q} e^{inx} \right| \leq \frac{2}{|\sin(\frac{x}{2})|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \lambda_n \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f et que la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit m un entier naturel. Vérifier que la fonction b définie sur $]0,2\pi[$ par $b(x) = \frac{\sin(mx)}{\sin(\frac{x}{2})}$ se prolonge par continuité au segment $[0,2\pi]$. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \lambda_n \sin(nx)\sin(mx)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \lambda_n \sin(nx)$ est la série de Fourier de la fonction f.