KHÔLLE 12 - MERCREDI 12 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et intégrable.

1. Donner l'expression des coefficients de Fourier réels (a_n et b_n) et complexes (c_n) de f. Comment lit-on sur ceux-ci que la fonction f est paire ou impaire ?

2. Sous quelles hypothèses peut-on affirmer que f est la somme de sa série de Fourier ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $[0,2\pi]$ est définie par $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. En déduire la somme des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Deuxième exercice — Soit f une fonction 2π-périodique de classe C^1. On note respectivement c_n et c'_n les coefficients de Fourier d'indice $n \in \mathbb{Z}$ de f et de f'

1. Exprimer c'_n en fonction de c_n et en déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2$ converge.

2. Soit $\mathrm{N} \geq 1$ un entier naturel. Établir l'inégalité

$$\left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} |c_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} n^2|c_n|^2\right)\left(\sum_{1\leq|n|\leq \mathrm{N}} \frac{1}{n^2}\right).$$

3. Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge et démontrer la majoration

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| \leq |c_0| + \frac{\pi}{\sqrt{3}}||f'||,$$

où $||f'|| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

Troisième exercice — Étant donné un entier naturel n, on désigne par S_n la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f considérée à l'exercice précédent.

1. Que peut-on dire de la convergence simple (resp. uniforme) de la suite de fonctions (S_n) vers f ?

2. Soit $n \geq 1$. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, la dérivée de la fonction S_n au point x est

$$\mathrm{S}'_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire l'abscisse x_n du premier maximum de la fonction S_n sur $[0,+\infty[$.

3. Écrire $\mathrm{S}_n(x_n)$ comme une somme de Riemann pour une fonction continue convenable sur $[0,\pi]$. En déduire que la suite $(\mathrm{S}_n(x_n))$ converge et déterminer sa limite.

KHÔLLE 12 - MERCREDI 12 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et intégrables.

1. Rappeler comment on définit un produit scalaire sur $\mathscr{F}$.

2. Quel que soit l'entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathscr{F}$ est orthonormée.

3. Soit $f \in \mathscr{F}$. Exprimer les coefficients de Fourier complexes de f à l'aide du produit scalaire puis démontrer que, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la somme partielle $\mathrm{S_N}$ de la série de Fourier de f est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{V_N} = \mathrm{Vect}(e_{-\mathrm{N}}, \dots, e_{\mathrm{N}})$ de $\mathscr{F}$. Comment peut-on en déduire l'inégalité de Bessel ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est définie par $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. Déterminer la somme des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(2n+1)}{16n^2+16n+3}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

Deuxième exercice — Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par c_n le coefficient de Fourier de f d'indice n.

Démontrer que f est π-périodique si et seulement si $c_n = 0$ pour tout entier n impair.

Troisième exercice — Soit $a \in]-1, 1[$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1-a\cos(x)}{1-2a\cos(x)+a^2}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(nx) = g(x)$$

puis en déduire le développement en série de Fourier de g.

2. Soit f une fonction intégrable et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_0^{2\pi} g(x-t) f(t) \mathrm{d}t.$$

Démontrer que h est la somme d'une série trigonométrique normalement convergente ; en déduire qu'il s'agit d'une fonction continue et déterminer ses coefficients de Fourier.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables et 2π-périodiques telles que

$$f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} g(x-t) f(t) \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

KHÔLLE 12 - MERCREDI 12 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable.

1. Donner l'expression des coefficients de Fourier réels (a_n et b_n) et complexes (c_n) de f.

2. Rappeler l'égalité de Parseval. En déduire que, si elle est continue et si tous ses coefficients de Fourier sont nuls, alors la fonction f est identiquement nulle.

3. Que peut-on dire de deux fonctions continues et 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π-périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est définie par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. En déduire la somme des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Deuxième exercice — Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x} f + k^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Troisième exercice — Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

2. Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de f et soient a_n'', b_n'' ceux de f''. Exprimer b_n'' en fonction de b_n et déterminer a_n et a_n''.

3. Établir la majoration

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{|b_n''|}{n^2}$$

puis en déduire la majoration

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)| \leq \frac{\pi^2}{3\sqrt{5}} ||f''||,$$

où $||f''|| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.