

KHÔLLE XXX - VENDREDI 21 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique et intégrable.

1. Donner l'expression des coefficients de Fourier réels (a_n et b_n) et complexes (c_n) de f . Comment lit-on sur ceux-ci que la fonction f est paire ou impaire ?
2. Sous quelles hypothèses peut-on affirmer que f est la somme de sa série de Fourier ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π -périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est définie par $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. En déduire la somme des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Deuxième exercice — Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 . On note respectivement c_n et c'_n les coefficients de Fourier d'indice $n \in \mathbb{Z}$ de f et de f'

1. Exprimer c'_n en fonction de c_n et en déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2$ converge.
2. Soit $N \geq 1$ un entier naturel. Établir l'inégalité

$$\left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n| \right)^2 \leq \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} n^2 |c_n|^2 \right) \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right).$$

3. Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ converge et démontrer la majoration

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| \leq |c_0| + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|,$$

où $\|f'\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Troisième exercice — Étant donné un entier naturel n , on désigne par S_n la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f considérée à l'exercice précédent.

1. Que peut-on dire de la convergence simple (resp. uniforme) de la suite de fonctions (S_n) vers f ?
2. Soit $n \geq 1$. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, la dérivée de la fonction S_n au point x est

$$S'_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire l'abscisse x_n du premier maximum de la fonction S_n sur $[0, +\infty[$.

3. Écrire $S_n(x_n)$ comme une somme de Riemann pour une fonction continue convenable sur $[0, \pi]$. En déduire que la suite $(S_n(x_n))$ converge et déterminer sa limite.

KHÔLLE XXX - VENDREDI 21 DÉCEMBRE 2007

Question de cours — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et intégrable.

1. Donner l'expression des coefficients de Fourier réels (a_n et b_n) et complexes (c_n) de f .
2. Rappeler l'égalité de Parseval. En déduire que, si elle est continue et si tous ses coefficients de Fourier sont nuls, alors la fonction f est identiquement nulle.
3. Que peut-on dire de deux fonctions continues et 2π -périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier ?

Premier exercice — Soit f la fonction réelle 2π -périodique dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est définie par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. En déduire la somme des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Deuxième exercice — Soit $k \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2} f + k^2 \frac{d}{dx} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Troisième exercice — Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire, continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} .
2. Soient a_n, b_n les coefficients de Fourier de f et soient a_n'', b_n'' ceux de f'' . Exprimer b_n'' en fonction de b_n et déterminer a_n et a_n'' .
3. Établir la majoration

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{|b_n''|}{n^2}$$

puis en déduire la majoration

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \leq \frac{\pi^2}{3\sqrt{5}} \|f''\|,$$

où $\|f''\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.