KHÔLLE 2 - JEUDI 3 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

1) Démontrer qu'une suite croissante de nombres réels est convergente si et seulement si elle est bornée.

2) Énoncer et démontrer la règle de Cauchy pour la convergence des séries réelles à termes positifs.

Premier exercice (8 points) —

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives telles que

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

pour tout entier naturel n. Démontrer que, si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Second exercice (7 points) —

1) Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{4n^3-n}$ est convergente.

2) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{4\mathrm{T}^3-\mathrm{T}}$ en éléments simples.

3) Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^3-n}$.

Indication : exprimer la somme de cette série en fonction de celle de la série harmonique alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

KHÔLLE 2 - JEUDI 3 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

Énoncer et démontrer la règle de comparaison séries-intégrales.

Premier exercice (7 points) —

Soit P un polynôme à coefficients réels ; on le suppose non nul.

1) Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\mathrm{P}(n)$ soit inversible pour tout entier $n \geq n_0$.

2) Étudier de la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{P}(n)}$ en fonction du degré de P.

Second exercice (8 points) — Soit s un nombre complexe tel que $\Re(s) > 1$.

1) Démontrer que la série complexe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ est absolument convergente.

2) On note $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers et on admettra que tout nombre entier $n \geq 1$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme d'un produit de nombres premiers.

(i) Soit $\mathrm{N} \geq 2$ un nombre entier naturel et soient $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ les nombres premiers inférieurs à N. Établir la minoration

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \geq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$$

et en déduire que l'ensemble $\mathscr{P}$ est infini.

(On pourra penser à utiliser l'identité $\sum_{k\geq 0} p^{-k} = \frac{1}{1-p^{-1}}$.)

(ii) Quel que soit l'entier naturel i, on désigne maintenant par p_i le i-ème nombre premier (donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.) et on suppose s réel.

Démontrer l'encadrement

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(iii) Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-p_n^{-s}}\right)_{\mathrm{N}\geq 1}$ converge vers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

La fonction

$$\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \geq 1\} \to \mathbb{C},\ s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

est la fonction zêta de Riemann*, du nom du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) qui l'a introduite et a démontré le rôle fondamental qu'elle joue en arithmétique.*

KHÔLLE 2 - JEUDI 3 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

1) Préciser le comportement des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

2) Démontrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Premier exercice (7 points) —

1) Démontrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

On rappelle le développement asymptotique

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} = \log(\mathrm{N}) + \gamma + o(1),$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ est la *constante d'Euler*.

2) L'objet de cette question est de calculer la somme de la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

(i) En utilisant l'indication précédente, donner un développement asymptotique de

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1}.$$

(ii) Déduire de ce qui précède la somme de la série harmonique alternée.

Second exercice (8 points) — On rappelle qu'une série réelle $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *semi-convergente* si elle convergente mais non absolument convergente.

1) Donner un exemple de série réelle semi-convergente.

2) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série réelle semi-convergente. On suppose $u_n \neq 0$ pour tout n.

(i) Justifier qu'il existe une infinité d'entiers n tels que u_n soit positif et une infinité d'entiers n tels que u_n soit négatif.

(ii) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ la série des termes positifs de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ celle de ses termes négatifs.

Démontrer que l'une au moins de ces deux séries est divergente.

(iii) Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ soit divergente. Démontrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ soit divergente.

Indication : sommer d'abord les premiers termes positifs jusqu'à obtenir 1 *puis retrancher le premier terme négatif ; sommer de nouveau les termes positifs restant jusqu'à obtenir* 2*, retrancher le deuxième terme négatif, etc. et justifier que ce procédé définit une série dont les sommes partielles tendent vers* $+\infty$*.*

3) Esquisser brièvement un raisonnement analogue lorsque la série des termes négatifs est divergente et énoncer le théorème ainsi démontré.