KHÔLLE 4 - MERCREDI 17 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

1) Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Démontrer que la série $\sum_n z_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum_n \mathfrak{Re}(z_n)$ et $\sum_n \mathfrak{Im}(z_n)$ convergent.

2) Énoncer la règle d'Abel pour la convergence des séries alternées et donner un exemple de série alternée convergente mais non absolument convergente.

Premier exercice (6 points) —

1) Démontrer que la série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout nombre complexe z.

2) Démontrer que la fonction

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est continue. (*Indication* : on pourra commencer par établir la majoration $|(z+\varepsilon)^n - z^n| \leq n|\varepsilon|(|z|+1)^n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z, \varepsilon \in \mathbb{C}$ avec $|\varepsilon| \leq 1$.)

Second exercice (9 points) — Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres complexes. On suppose que

(i) la série $|u_0 - u_1| + |u_1 - u_2| + \ldots + |u_n - u_{n-1}| + \ldots$ est convergente ;

(ii) la suite $\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On pose

$$\mathrm{U}_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} |u_n - u_{n-1}| \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_m = v_0 + v_1 + \ldots + v_m.$$

1) Établir l'identité

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n v_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (u_n - u_{n+1})\mathrm{V}_n + u_{\mathrm{N}}\mathrm{V}_{\mathrm{N}}$$

pour tout entier $\mathrm{N} \geq 1$. (*Indication* : écrire v_n sous la forme $v_n = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_{n-1}$ pour $n \geq 1$.)

2) Déduire de ce qui précède le *théorème d'Abel* : sous les hypothèses initiales sur les suites (u_n) et (v_n), la série $\sum_n u_n v_n$ converge et sa somme est majorée par $\mathrm{U}_0 \sup_{n\geq 0} |\mathrm{V}_n|$.

3) En guise d'application, démontrer la règle d'Abel sur la convergence des séries alternées.

KHÔLLE 4 - MERCREDI 17 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

Énoncer et démontrer la règle de comparaison séries-intégrales.

Premier exercice (6 points) —

Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{1}{n\log(n)}$.

Second exercice (9 points) — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1) On suppose que la série $\sum_n v_n$ diverge.

(i) Quel que soit l'entier n_0, vérifier que

$$\sum_{n=0}^{N} v_n \sim \sum_{n=n_0}^{N} v_n$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

(ii) Démontrer que la série $\sum_n u_n$ diverge et que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \sim \sum_{n=0}^{N} v_n$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

2) On suppose que la série $\sum_n v_n$ converge. Démontrer qu'alors la série $\sum_n u_n$ converge et que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \sim \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

3) En guise d'application de ce qui précède, on va établir le développement asymptotique

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log(N) + \gamma + \frac{1}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

lorsque N tend vers $+\infty$, où γ est un nombre réel (la *constante d'Euler*).

(i) Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \log(N) \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{N}$$

lorsque N tend vers $+\infty$. (*Indication* : comparer ces séries à des intégrales).

(ii) En utilisant la suite $u_n = \frac{1}{n} - (\log(n) - \log(n-1))$, déduire des questions précédentes le développement asymptotique annoncé pour $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

KHÔLLE 4 - MERCREDI 17 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur Ω à valeurs réelles.

1) Que signifie l'expression « la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f:\Omega\to\mathbb{R}$ » ?

2) On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Démontrer que, si chacune des fonctions f_n est continue, alors la fonction f est continue.

Premier exercice (7 points) —

1) Étudier la convergence de la série complexe $\sum_n \frac{i^n}{n}$.

2) En admettant le développement asymptotique

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\mathrm{N}} = \log(\mathrm{N}) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

lorsque N tend vers $+\infty$, où γ est un nombre réel (la *constante d'Euler*), calculer la partie réelle du nombre complexe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

Second exercice (8 points) —

1) Écrire le développement de Taylor à l'ordre n en 0 de la fonction $\arctan(x)$ et expliciter le reste sous forme intégrale.

2) Quel que soit $x\in[0,1[$, démontrer que $\arctan(x)$ est la somme de sa série de Taylor en 0, c'est-à-dire

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \arctan^{(n)}(0) x^n.$$