KHÔLLE 5 - MERCREDI 24 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

Soit (f_n) une suite de fonctions complexes définies et continues sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.
1) Si la suite (f_n) converge uniformément, démontrer que sa limite f est une fonction continue.
2) Énoncer le critère d'Abel pour la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Premier exercice (8 points) — Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et convergeant simplement vers une fonction réelle f sur I.

(i) On suppose que

$$x \leq y \;\Rightarrow\; f_n(x) \leq f_n(y)$$

pour tous $x, y \in I$ et tout $n \in \mathrm{N}$.

Démontrer que

$$x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{I}$.

(ii) Supposons maintenant que

$$x < y \Longrightarrow f_n(x) < f_n(y)$$

pour tous $x, y \in \mathrm{I}$ et tout $n \in \mathrm{N}$.

À l'aide d'un exemple, justifier que l'application f peut *ne pas* être strictement croissante.

Qu'en est-il si la convergence est uniforme ?

(iii) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(0) = \lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0.$$

Démontrer que la suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathrm{N}^*}$ définies par $f_n(x) = f(nx)$ converge vers simplement vers 0.

Démontrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme si et seulement si $f = 0$.

Second exercice (7 points) — Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_n & : \;]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} \end{array} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

KHÔLLE 5 - MERCREDI 24 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —

1) Définir les notions de convergence normale et de convergence uniforme pour les séries de fonctions.
2) Démontrer que si une série de fonctions est normalement convergente, elle est converge uniformément.

Premier exercice (8 points) — Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies et dérivables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

On suppose que cette suite converge simplement vers 0 et qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$|f_n'(x)| \leq M$$

pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Soit ε un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier naturel k et une partition $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k+1} = b$ de l'intervalle $[a,b]$ tels que la condition suivante soit vraie sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\forall t \in [x_i, x_{i+1}],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t) - f_n(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) Soit ε un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que

$$n \geq \mathrm{N} \implies \forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| < \varepsilon.$$

Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) est uniformément convergente.

Second exercice (7 points) — Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{n^3 x}{n^4 + x^4} \end{array} \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\}).$$

KHÔLLE 5 - MERCREDI 24 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) —
1) Énoncer et démontrer la règle de comparaison série-intégrale.
2) Énoncer le théorème de dérivation des suites de fonctions.

Premier exercice (8 points) — Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un nombre réel $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant à la condition suivante :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq M.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions réelles définie par $f_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$.

(i) Démontrer que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue g, que l'on ne demande pas d'expliciter.

(iii) Démontrer que $g(x+y) = g(x) + g(y)$ pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$. En déduire que $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Déduire de ce qui précède qu'il existe un nombre réel α tel que

$$g(x) = \alpha x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. (*Indication : on rappelle que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombre rationnels.*)

Second exercice (7 points) — Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$