KHÔLLE 6 - MERCREDI 31 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

1) Donner la définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

2) Démontrer que la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ contenu dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Que peut-on en déduire quant à l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels la série numérique $\sum_n a_n t^n$ converge ?

Premier exercice (4 points) — Quel que soit l'entier naturel $n \geq 2$, on définit une fonction réelle f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n = \frac{\cos(nx)}{n^2+x^2-1}$.

Étudier la converge de la série de fonctions $\sum_n f_n$.

Deuxième exercice (5 points) —

Quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$, on définit une fonction réelle f_n sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1) Démontrer que la suite (f_n) est simplement convergente et déterminer sa limite f.

2) Démontrer que la suite (f_n) est uniformément convergente sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Troisième exercice (6 points) — Soit (f_n) une suite de fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f.

1) Supposons que f soit majorée ; démontrer qu'alors la suite de fonctions (e^{f_n}) et uniformément convergente et déterminer sa limite.

2) Exhiber un contre-exemple montrant que ceci n'est plus vrai si l'on ne suppose pas f majorée.

KHÔLLE 6 - MERCREDI 31 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit (f_n) une suite de fonctions réelles et continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme pour la série de fonctions $\sum_n f_n$.

2) On suppose que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Démontrer que la fonction f est continue sur I.

Premier exercice (4 points) — Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum f_n$ sur $]1,+\infty[$, puis sur $]a,+\infty[$ avec $a > 1$.

Deuxième exercice (5 points) — Soient (u_n) une suite de nombres réels convergeant vers u et (v_n) une suite de nombres réels positifs convergeant vers v ; on suppose $v > 0$. On définit pour tout entier naturel n une fonction réelle f_n sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x+u_n}{x+v_n}.$$

Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Troisième exercice (6 points) — Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que f est aussi un polynôme.

2) Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle borné (penser aux séries de Taylor...) ?

Question de cours (5 points) — Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme pour la série de fonctions $\sum_n f_n$.

2) On suppose que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Justifier l'existence de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ puis démontrer que c'est la somme de la série

$$\sum_n \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Premier exercice (5 points) — Quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$, on définit une fonction réelle f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

Deuxième exercice (5 points) — Étudier la convergence de la suite

$$\left(\int_{-1}^{1} \frac{n^2x+\cos(\sqrt{n}x)}{n^2+x^2}\mathrm{d}x\right)$$

et, le cas échéans, déterminer sa limite.

Troisième exercice (6 points) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge simplement vers 0 et que, pour tout point $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante.

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge *uniformément* vers 0 sur $[0,1]$.

1. Justifier les deux faits suivants :
   (a) pour tout $n \geq 0$, il existe un point $x_n \in [0,1]$ tel que : $f_n(x_n) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$
   (b) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ admettant une limite $\widetilde{x} \in [0,1]$.
2. Pourquoi la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ admet-elle une limite ℓ ?
3. Démontrer que

$$f_n(\widetilde{x}) \geq \ell$$

pour tout entier naturel n et conclure la preuve.