KHÔLLE 6 - MERCREDI 31 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

1) Donner la définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

2) Démontrer que la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0,r)$ contenu dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Que peut-on en déduire quant à l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels la série numérique $\sum_n a_n t^n$ converge ?

Premier exercice (4 points) — Quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$, on définit une fonction réelle f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n^2 + x^2}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

Deuxième exercice (5 points) —

1) Démontrer que la série de terme général $\frac{1}{4n^3-n}$ est convergente.

2) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{4\mathrm{T}^3-\mathrm{T}}$ en éléments simples.

3) On rappelle que la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et a pour somme $-\log(2)$. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^3-n}$.

Troisième exercice (6 points) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge simplement vers 0 et que, pour tout point $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est décroissante.

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge *uniformément* vers 0 sur $[0,1]$.

1. Justifier les deux faits suivants :
   (a) pour tout $n \geq 0$, il existe un point $x_n \in [0,1]$ tel que : $f_n(x_n) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$
   (b) il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ admettant une limite $\widetilde{x} \in [0,1]$.
2. Pourquoi la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ admet-elle une limite ℓ ?
3. Démontrer que
$$f_n(\widetilde{x}) \geq \ell$$
pour tout entier naturel n et conclure la preuve.

KHÔLLE 6 - MERCREDI 31 OCTOBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme pour la série de fonctions $\sum_n f_n$.

2) On suppose que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ puis démontrer que c'est la somme de la série

$$\sum_n \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Premier exercice (4 points) — Quel que soit l'entier naturel n, on définit une fonction réelle sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$. Étudier la convergence de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Deuxième exercice (6 points) — 1) Écrire le développement de Taylor à l'ordre n en 0 de la fonction $\arctan(x)$ et expliciter le reste sous forme intégrale.

2) Démontrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \arctan^{(n)}(0) x^n$$

converge uniformément vers la fonction arctan sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

3) Démontrer l'identité

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots .$$

Troisième exercice (5 points) — Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose que cette suite satisfait aux deux conditions suivantes :

1. elle est uniformément bornée : il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $|u_n(x)| \leq \mathrm{M}$ pour tout entier naturel n et tout point $x \in [0,1]$;
2. elle converge uniformément vers 0 sur tout *segment* contenu dans $]0,1]$.

On pose $f_n(x) = xu_n(x)$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Khôlle 6 - Mercredi 31 octobre 2007

Question de cours (5 points) — Énoncer et démontrer la règle de comparaison entre une série et une intégrale.

Premier exercice (4 points) — Quel que soit l'entier naturel n, on définit une fonction réelle f_n sur $]0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $]0,1]$, puis sur $[\delta,1]$ avec $\delta > 0$.

Deuxième exercice (6 points) — Quel que soit l'entier naturel $n \geq 1$, on définit des fonctions réelles f_n et g_n sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1+\sin x}{x+1/n}, \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\sin x}{x+1/n}.$$

1. Démontrer que la suite de terme général $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite (simple), notée g, de la suite de fonctions (g_n).
3. Démontrer que la convergence de (g_n) vers g est uniforme sur $[\delta,1]$ pour tout $\delta > 0$.
4. Démontrer que la suite de terme général $\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$ converge vers $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.
5. Donner un équivalent simple de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Troisième exercice (5 points) — Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que f est aussi un polynôme.

2) Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle borné (penser aux séries de Taylor...) ?