## KHÔLLE 7 - MERCREDI 7 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soit $(a_n)$ une suite de nombres complexes.

1) Donner la définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$.

2) Démontrer que la fonction

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z| < \mathrm{R}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est dérivable.

**Premier exercice** (4 points) — Démontrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{z-n}$ converge uniformément sur tout disque fermé contenu dans $\mathbb{C} - \mathbb{N}$ mais qu'elle ne converge absolument en aucun point de $\mathbb{C}$.

**Deuxième exercice** (6 points) — Étant donné un entier naturel $n \geq 1$, on définit une fonction réelle $f_n$ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$.

1) Démontrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$.

2) Démontrer que la fonction réelle $f$, définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x),$$

est continuement dérivable. (*Indication : étudier la convergence sur un segment contenu dans* $]-1, 1[$.)

3) Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 1 dans $]-1, 1[$.

**Troisième exercice** (6 points) — Soit $a_n$ le $n$-ème coefficient de Taylor de la fonction $\sqrt{1-x}$ en 0.

1) Établir l'inégalité $\sqrt{1-t} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n t^n$ pour tout entier naturel N et tout $t \in [0, 1]$.

2) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$.

3) Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.

4) Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $t \mapsto |t|$. (*Indication :* $|t| = \sqrt{t^2}$.)

## KHÔLLE 7 - MERCREDI 7 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soient $(a_n)$, $(a'_n)$ deux suites de nombres complexes. On désigne respectivement par R et R$'$ les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n a'_n z^n$. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (a_n + a'_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(\mathbb{R}, \mathbb{R}')$.

**Premier exercice** (5 points) — Quel que soit l'entier naturel $n$, on définit une fonction réelle $f_n$ sur le segment $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(t) = (\sin t)^n$.

1) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)$.

2) La suite de fonctions $(f_n)$ converge-t-elle uniformément sur le segment I ?

3) Démontrer que la suite de terme général

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t$$

converge vers 0. (*Indication : étant donné un nombre réel* $\varepsilon > 0$*, estimer séparément les intégrales sur* $[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ *et sur* $[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}]$.)

**Deuxième exercice** (5 points) — Étant donné un entier naturel $n \geq 1$, on définit une fonction réelle $f_n$ sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement ; on pose $f(x) = \sum_n f_n(x)$.

Démontrer que la fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

**Troisième exercice** (6 points) — Soit $(f_n)$ une suite uniformément convergente de fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction positive $g$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $|f_n(t)| \leq |g(t)|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ ;

(ii) l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \mathrm{d}t$$

est convergente.

Soit $f$ le limite de la suite $(f_n)$. Démontrer que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$$

est convergente puis que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t.$$

## KHÔLLE 7 - MERCREDI 7 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soit $(f_n)$ une suite de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $g$.

Justifier l'intégrabilité de $g$ sur $[a,b]$ puis démontrer que la série

$$\sum_n \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

converge vers $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

**Premier exercice** (5 points) — Quel que soit l'entier naturel $n$, on définit une fonction réelle $f_n$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2+n^2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ est uniformément convergente.

**Deuxième exercice** (5 points) — Soit $\sum_n a_n$ une série réelle convergente. Démontrer que la série de fonctions $\sum_n a_n x^n$ est uniformément convergente sur tout segment contenu dans $[0,1[$.

**Troisième exercice** (6 points) — Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de nombres réels. Quel que soit l'entier naturel N, on pose

$$\mathrm{V}_\mathrm{N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} v_n.$$

1) Étant donnés deux entiers $m,n$ tels que $m \geq n+1$, établir l'identité

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{m} \mathrm{V}_k(u_k - u_{k+1}) + u_{n+1}\mathrm{V}_n + u_{m+1}\mathrm{V}_m.$$

(*Indication : écrire $v_k$ sous la forme* $\mathrm{V}_k - \mathrm{V}_{k-1}$.)

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

– la suite $(u_n)$ est décroissante et elle converge vers $0$ ;
– la suite $(\mathrm{V}_n)$ est bornée.

2) En utilisant la question précédente, démontrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k v_k\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ satisfait au critère de Cauchy.

3) Conclure.

## KHÔLLE 7 - MERCREDI 7 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soit $(f_n)$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Donner les définitions de la convergence uniforme et de la convergence normale de la série de fonctions $\sum_n f_n$.

2) Démontrer que la convergence normale implique la convergence uniforme.

3) Donner un exemple de série de fonctions uniformément convergente mais non normalement convergente.

**Premier exercice** (6 points) —

1) Démontrer que la série
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$$
est uniformément convergente sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

2) Démontrer l'identité
$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$
(*Indication :* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x)=\frac{1}{1+x^2}$.)

**Deuxième exercice** (5 points) — Soit $(f_n)$ une suite de fonctions réelles définies sur $]0,1]$. On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction $f$ sur $]0,1]$ et que la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans $]0,1]$.

Si la suite $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers $f$ sur $]0,1]$, démontrer qu'il existe une suite $(x_n)$ de points de $]0,1]$ tendant vers 0 et tels que $|f(x_n)-f_n(x_n)|$ ne tende pas vers 0.

**Troisième exercice** (5 points) — Étant donné un entier naturel $n\geq 1$, on définit une fonction complexe $f_n$ sur $\mathbb{C}$ par $f_n(z)=\frac{\mathrm{e}^{nz}}{n}$.

1) Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ en lesquels la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement.

2) Soit $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif. Démontrer que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur le sous-ensemble $\{z\in\mathbb{C}\mid \Re(z)\leq 0,\ |z|\geq\varepsilon\}$ de $\mathbb{C}$.