KHÔLLE 7BIS - MERCREDI 21 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

1. Donner la définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$.

2. On suppose $\mathrm{R} > 0$. Démontrer que la somme de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \mathrm{R}\}$.

Premier exercice (5 points) — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) z^n \qquad\qquad \sum_n \frac{n}{2^{3n+1}} z^{2n}$$

Deuxième exercice (4 points) — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle qui converge vers 0 et telle que la série $\sum_n a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$.

Troisième exercice (6 points) — On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{(n-1)n}$.

1. Quel est son rayon de convergence R ? En tout point x où la série converge, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.
2. Montrer que la convergence est normale sur $[-R, R]$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-R, R[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire une expression simple de f, puis la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n}.$$