KHÔLLE 8 - MERCREDI 14 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Donner la définition de l'exponentielle complexe exp, la justifier (préciser le domaine de définition), et démontrer que, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Premier exercice (6 points) — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$\sum_n \ln(n) z^n$ $\qquad$ $\sum_n \frac{n}{2^{3n+1}} z^{2n}$

$\sum_n a_n z^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite périodique non identiquement nulle.

Deuxième exercice (4 points) — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0 et telle que $\sum_n a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$.

Troisième exercice (5 points) — On considére la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{(n-1)n}$.

1. Quel est son rayon de convergence R ? En tout point x où la série converge, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.
2. Montrer que la convergence est normale sur $[-R, R]$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-R, R[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire une expression simple de f, puis la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n}.$$

KHÔLLE 8 - MERCREDI 14 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est indéfiniment dérivable sur I et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Montrer que f est développable en série entière sur I. Donner des exemples d'application de cette propriété.

Premier exercice (6 points) — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_n \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n \qquad\qquad \sum_n \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a} z^n \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

$\sum_n e^{\mathrm{E}(n\sqrt{2})} z^n$, où $\mathrm{E}(x)$ est la partie entière du nombre réel x.

Deuxième exercice (9 points) — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On suppose que la série entière $\sum_n a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et, pour $x \in]-1,1[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1) On suppose que la série $\sum_n a_n$ converge et on pose $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ (reste d'ordre n).

(i) En observant que $a_n = R_n - R_{n+1}$, établir l'identité

$$\sum_{n=N}^{N+p} a_n x^n = \sum_{n=N+1}^{N+p} R_n (x^n - x^{n-1}) + R_N x^N - R_{N+p+1} x^{N+p}$$

pour tous $x \in [0,1], N, p \in \mathbb{N}$.

(ii) Déduire de ce qui précède la majoration

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n x^n \right| \leq 3 \sup_{n\geq N} |R_N|$$

pour tous $x \in [0,1],\ N \in \mathbb{N}$.

(iii) En appliquant le critère de Cauchy, montrer que la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ et en conclure que : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2) On suppose que la série $\sum_n a_n$ diverge et, pour tout $n \geq 0$, $a_n \geq 0$. Montrer que : $f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

KHÔLLE 8 - MERCREDI 14 NOVEMBRE 2007

Question de cours (5 points) — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est développable en série entière. Rappeler ce que ceci signifie puis donner, en la démontrant, l'expression des coefficients de ce développement.

Premier exercice (6 points) — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$\sum_n \sin\left(\frac{\ln n}{2^n - n}\right) z^n$ $\qquad$ $\sum_n n! z^{n^2}$

$\sum_n a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite complexe admettant une limite $\ell \neq 0$.

Deuxième exercice (4 points) — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$. On suppose $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_n a_n z^{pn} \text{ où } p \in \mathrm{N}^* \qquad \sum_n \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Troisième exercice (5 points) — Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ des suites complexes. On note R_a le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ et R_b celui de $\sum_n b_n z^n$.

Pour tout n, on note $c_n = a_n b_n$. Montrer que le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_n c_n z^n$ vérifie :

$$R_c \geq R_a R_b.$$

Montrer par des exemples qu'il peut y avoir égalité ou non.