## KHÔLLE 9 - MERCREDI 21 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Donner la définition de l'exponentielle complexe exp, la justifier (préciser le domaine de définition), et démontrer que, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

**Premier exercice** (5 points) — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{1}{2n+1}x^n$ et calculer sa somme aux points de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ appartenant à son disque de convergence. (*Indication : calculer d'abord la somme de la série entière* $\sum_n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$.

**Deuxième exercice** (5 points) — On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence à partir de $a_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ par

$$a_{n+1} = \log(1 + a_n).$$

1. Démontrer que la suite $(a_n)$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers un nombre réel $\ell$ que l'on déterminera.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$ (*Indication : on pourra commencer par prouver* $a_{n+1} \sim a_n$ *lorsque n tend vers l'infini*.)

**Troisième exercice** (5 points) — On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$$

et on cherche ses solutions développables en série entière au voisinage de 0.

On suppose qu'il existe une solution $y$ de cette équation telle que $y(x) = \sum_n a_n x^n$ sur un intervalle ouvert contenant 0, où $(a_n)$ est une suite de nombres réels.

1. Montrer que $a_0 = a_1 = a_2$, $a_3 = 0$ et $(n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$.
2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n x^n$.
4. Que peut-on conclure de ce qui précède quant aux solutions de l'équation différentielle considérée ?

## KHÔLLE 9 - MERCREDI 21 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit $f$ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est indéfiniment dérivable sur $I$ et qu'il existe une constante $\mathrm{M} > 0$ telle que, pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathrm{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{M}.$$

Montrer que $f$ est développable en série entière sur I. Donner deux exemples d'application de cette propriété.

**Premier exercice** (5 points) — Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n n^2 x^n$ et calculer sa somme. (*Indication : pour le calcul de la somme, écrire $n^2$ sous la forme $n(n-1)+n$.*)

**Deuxième exercice** (5 points) — Étant donné un entier naturel $n$, on désigne par $a_n$ le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3x+5y=n$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_n a_n z^n$.

(*Indication : calculer la série entière produit de $\sum_n x^{3n}$ et $\sum_n x^{5n}$.*)

**Troisième exercice** (5 points) — On considère l'équation différentielle

$$4x(1-x)y'' + 2(1-3x)y' - 2y = 0$$

et on cherche ses solutions développables en série entière au voisinage de 0.

On suppose qu'il existe une solution $y$ telle que $y(x) = \sum_n a_n x^n$ sur un intervalle ouvert contenant 0, où $(a_n)$ est une suite de nombres réels.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $(2n^2+3n+1)a_{n+} = (2n^2+n+1)a_n$.
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ ?
3. Que peut-on conclure de ce qui précède quant aux solutions de l'équation différentielle considérée ?

## KHÔLLE 9 - MERCREDI 21 NOVEMBRE 2007

**Question de cours** (5 points) — Soit $Ir$ un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est développable en série entière. Rappeler ce que ceci signifie puis donner, en la démontrant, l'expression des coefficients de ce développement.

**Premier exercice** (5 points) — Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\cosh(n)}{n} x^n$.

**Deuxième exercice** (5 points) — Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ et soit $\mathrm{R}'$ celui de la série entière $\sum_n S_n z^n$.

1. Démontrer que $\mathrm{R} \geq \mathrm{R}'$.
2. Supposons $\mathrm{R} \leq 1$. Démontrer que l'on a alors $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$ et

$$\frac{1}{1-z} \sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}$.

**Troisième exercice** (5 points) — On considère l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

et on cherche ses solutions développables en série entière au voisinage de 0.

Supposons que $y$ soit une solution telle que $y(x) = \sum_n a_n x^n$ sur un intervalle ouvert contenant 0, où $(a_n)$ est une suite de nombres réels.

1. Montrer que $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1}$.
2. En déduire une formule explicite pour $a_n$ et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$.
3. Que peut-on conclure de ce qui précède quant aux solutions de l'équation différentielle considérée ?