TD 4, Math III-1, analyse

Suites de fonctions

1. On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Ces suites convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
   (b) Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?
   (c) Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2)$.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que $\forall a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.
   (a) Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
   (c) Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.
   (a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
   (b) Etudier la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
   (c) On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

6. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan(x/n)$. Etudier la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.