TD 5, Math III-1, analyse

Séries de fonctions

1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants:
   (a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
   (b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
   (c) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$.
2. Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme.
3. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.
   (a) Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.
4. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.
   (a) En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
   (b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.
5. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.
   (a) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
   (c) Montrer que $\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.
   (d) Montrer que $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.