TD 6, Math III-1, analyse

Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$):
   (a) $\sum (-1)^n (n+3)!\ z^n$,
   (b) $\sum n^n z^n$,
   (c) $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
   (d) $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
   (e) $\sum z^{n!}$,
   (f) $\sum (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
   (g) $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
2. soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:
   (a) $\sum a_n z^{3n}$,
   (b) $\sum a_n 3^n z^{2n}$.
3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes:
   (a) $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
   (b) $\sum \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.
4. Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.
5. Vrai ou faux ?
   (a) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
   (b) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.
6. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum x^n$.

(b) En utilisant l'expression des sommes partielles d'une série géométrique, montrer que $\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$.

(c) En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum nx^n$, de $\sum n^2x^n$ et de $\displaystyle\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

7. (a) Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\displaystyle\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

   (b) Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

   (c) En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x)$.

   (d) En déduire le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

8. Déterminer les séries entières solutions de $x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0$. Calculer le rayon des séries entières obtenues.