TD 7, Math III-1, analyse

Développement de fonctions en séries entières

1. On considère l'équation différentielle $f''(x) - 4f(x) = 0$. On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

   Montrer que la seule solution est $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

2. On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

   (a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle
   $$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{1}$$
   (Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)

   (b) Déterminer les solutions de (1) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.

   (c) Montrer que si g est solution de l'équation (1) sur un intervalle I ne contenant pas -1 alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = C(1+x)^\alpha$.

3. Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

4. Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**

   On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

   (c) En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

5. Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\frac{1}{x-5}$, $\frac{1}{1+9x^2}$, $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\ln(5-x)$.

6. Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\dfrac{1}{(2+x)^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Développer $\ln(x)$ en série entière <u>autour de 1</u>.