TD 8, Math III-1, analyse

Séries de Fourier

1. On considère la fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

   (a) Faire un dessin rapide de la fonction.

   (b) Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

   (c) Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.

   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

   (a) Faire un dessin rapide de la fonction.

   (b) Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

   (c) Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.

   (d) Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1]$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des cœfficients réels.

4. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

5. Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

6. Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

7. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^4}$.

8. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Etudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (voir exercice 1).