Khôlle du 28 novembre 2007

Sujet A

Question de cours. Énoncez l'égalité de Parseval (en précisant bien les hypothèses à vérifier).

Exercice 1. Déterminez le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} z^n$. Calculez ensuite la valeur de sa somme.

Exercice 2. Donnez le développement en série entière de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire.
2. En déduire le développement en série entière de f.
3. Déterminer le développememnt en série entière de la fonction g définie par

$$g(x) = (\arcsin x)^2.$$

Khôlle du 28 novembre 2007

Sujet B

Question de cours. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 2π-périodique. Dans quel(s) cas peut-on dire qu'une fonction est égale à sa série de Fourier ?

Exercice 1. Donnez le domaine de convergence et la somme de la série entière suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$

Exercice 2. Vrai ou faux ? On donnera pour chaque énoncé une démonstration ou bien un contre-exemple

(a) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

(b) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.

(c) Une série entière dont le rayon de convergence est $+\infty$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$.

Exercice 3. Donnez le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$ en utilisant la relation $x = (1 - x - x^2) f(x)$.

Exercice 4. Soit (a_n) la suite définie par récurrence par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, et

$$\forall n \geqslant 2, a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (na_n) est croissante. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Soit $f(x)$ la somme de cette série pour $x \in]-R, R[$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire, et en déduire f.

Khôlle du 28 novembre 2007

Sujet C

Question de cours. Enoncer l'inégalité de Bessel (en précisant bien les hypothèses à vérifier)

Exercice 1.
Calculez la somme de la série entière de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{n} \cos \frac{2\pi n}{3}$.

Exercice 2. Donnez le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$.

Exercice 3. On suppose que les séries entières $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs R et R'. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.