ENS Lyon — **Algèbre approfondie**
M1 — **2008-2009**

CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL

Exercice A —

1. En vertu de la propriété universelle du produit libre, un homomorphisme de $\mathrm{G} * \mathrm{A}$ dans un groupe H équivaut à la donnée d'un couple d'homomorphismes de G et A dans H.

L'application $\mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle x \rangle,\ \ a \mapsto xax^{-1}$ étant manifestement un homomorphisme de groupes, il existe un unique homomorphisme de groupes $i : \mathrm{G} * \mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle x \rangle$ tel que $i_{|\mathrm{G}}$ soit l'injection canonique $\mathrm{G} \to \mathrm{G} * \langle x \rangle$ et $i(a) = xax^{-1}$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

De même, l'application $\mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle y \rangle,\ \ a \mapsto y\psi(a)y^{-1}$ étant manifestement un homomorphisme de groupes, il existe un unique homomorphisme de groupes $j : \mathrm{G} * \mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle y \rangle$ tel que $j_{|\mathrm{G}}$ soit l'injection canonique $\mathrm{G} \to \mathrm{G} * \langle y \rangle$ et $j(a) = y\psi(a)y^{-1}$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

2. Le groupe $\Gamma = (\mathrm{G} * \langle x \rangle) *_{\mathrm{G}*\mathrm{A}} (\mathrm{G} * \langle y \rangle)$ est le quotient du produit libre $(\mathrm{G} * \langle x \rangle) * (\mathrm{G} * \langle y \rangle)$ par le plus petit sous-groupe distingué contenant les élément de la forme $i(t)j(t)^{-1}$, $t \in \mathrm{G} * \mathrm{A}$. Comme $i(g) = j(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, les deux applications naturelles de G dans Γ coïncident.

3. Désignons par ι l'injection canonique de A dansG et voyons A comme un groupe disjoint de G.

Tout élément $t \neq e$ de $\mathrm{G} * \mathrm{A}$ s'écrit de manière unique sous la forme d'un mot $t_1 \ldots t_m$, avec $t_{2p+1} \in \mathrm{G} - \{e\}$ et $t_{2p} \in \mathrm{A} - \{e\}$, ou $t_{2p+1} \in \mathrm{A} - \{e\}$ et $t_{2p} \in \mathrm{G} - \{e\}$ (*forme normale*).

On a alors $i(t) = t_1 x\iota(t_2)x^{-1}t_3 \ldots$ ou $i(t) = x\iota(t_1)x^{-1}t_2 x\iota(t_3)x^{-1} \ldots$. Comme l'application ι est injective, la représentation obtenue de $i(t)$ est sa forme normale et donc $i(t) \neq e$. Ainsi, l'application i est injective.

Si l'application ψ est injective, elle induit un isomorphisme entre A et un sous-groupe A' de G. Si l'on note i' l'homomorphisme de $\mathrm{G} * \mathrm{A}'$ dans $\mathrm{G} * \langle y \rangle$ défini comme i après substitution de A' à A, cette application est injective d'après ce que l'on vient de dire et il en est alors de même pour j en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} * \mathrm{A} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{G} * \langle y \rangle \\
\mathrm{G} * \mathrm{A}' \arrow[ur, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

4. Supposons que l'application ψ soit injective. Les homomorphismes $i : \mathrm{G} * \mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle x \rangle$ et $j : \mathrm{G} * \mathrm{A} \to \mathrm{G} * \langle y \rangle$ étant injectifs, on dispose d'une représentation sous forme normale des éléments de Γ : ayant choisi un ensemble $\mathrm{S} \subset \mathrm{G} * \langle x \rangle$ (resp. $\mathrm{S}' \subset \mathrm{G} * \langle y \rangle$) de représentants des classes à droite modulo $\mathrm{G} * \mathrm{A}$ distinctes de $\mathrm{G} * \mathrm{A}$, tout élément γ de Γ s'écrit de manière unique sous la forme d'un mot $\gamma = h\alpha_1 \ldots \alpha_m$ avec $h \in \mathrm{G} * \mathrm{A} - \{e\}$ et $\alpha_{2p+1} \in \mathrm{S}$, $\alpha_{2p} \in \mathrm{S}'$ ou $\alpha_{2p} \in \mathrm{S}$, $\alpha_{2p+1} \in \mathrm{S}'$.

Pour tout $g \in \mathrm{G}$, $u(g) = i(g) \in \mathrm{G} * A$ est une écriture sous forme normale dans Γ donc $u(g) = e$ si et seulement si $i(g) = e$, donc si et seulement si $g = e$. Ainsi, l'application u est injective.

Identifions finalement $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ et G à des sous-groupes de Γ via les injections i et j. Quel que soit $a \in \mathrm{A}$, on a

$$xax^{-1} = y\psi(a)y^{-1}$$

dans Γ et donc $\psi(a) = tat^{-1}$ avec $t = y^{-1}x$.

Exercice B —

1. Soient A un anneau et M, N deux A-modules.

1.1. Rappelons la propriété universelle de la localisation : étant donnés un A-module P, un $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module Q et une application A-linéaire $f : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$, il existe une unique application $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linéaire $\widetilde{f}$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Q} \\ \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, l'application i étant définie par $i(x) = 1 \otimes x = x/1$. On a $\widetilde{f}(x/s) = f(x)/s$ pour tous $x \in \mathrm{P}$, $s \in \mathrm{S}$.

On obtient l'application $\widetilde{\varphi}$ désirée en appliquant ceci à $\mathrm{P} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{M},\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N})$.

1.2. Pour tous $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ et $s \in \mathrm{S}$, la condition $\widetilde{\varphi}(u/s) = 0$ équivaut à

$$\forall m \in \mathrm{M},\ \ u(m)/1 = 0 \quad \text{dans } \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N},$$

c'est-à-dire à

$$\forall m \in \mathrm{M},\ \ \exists t \in \mathrm{S},\ \ tu(m) = 0 \quad \text{dans N}.$$

Supposons que le A-module M soit de type fini. Si $m_1,\dots,m_n$ sont des générateurs de M, il existe des éléments $t_1,\dots,t_n \in \mathrm{S}$ tels que $u(t_i m_i) = t_i u(m_i) = 0$ pour tout i. Posant $t = t_1 \dots t_n$, $t \in \mathrm{S}$ par multiplicativité et $u(tm_i) = tu(m_i) = 0$ pour tout i, donc $u(tm) = tu(m) = 0$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. Ainsi, $tu = 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ et donc $u/1 = 0$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$.

1.3. Supposons que l'anneau A soit noethérien et que le A-module M soit le type fini. Il existe par hypothèse d'une application A-linéaire surjective $p : \mathrm{A}^n \to \mathrm{M}$; comme en outre A est nothérien, le sous-A-module $\ker(p)$ de A^n est de type fini et on en déduit une suite exacte

$$\mathrm{A}^m \xrightarrow{q} \mathrm{A}^n \xrightarrow{p} \mathrm{M} \longrightarrow 0\ .$$

Considérons une application $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linéaire $v : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$. Désignant par $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de A^n, il existe un élément $s \in \mathrm{S}$ tel que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$(v \circ \mathrm{S}^{-1}p)(e_i) = x_i/s$$

avec $x_i \in \mathrm{N}$. Soit $u : \mathrm{A}^n \to \mathrm{N}$ l'application A-linéaire définie par $u(e_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; par construction, $v \circ \mathrm{S}^{-1}p = u/s$. La localisation étant un foncteur exact, la suite de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-modules

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^m \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}q} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}^n \xrightarrow{\mathrm{S}^{-1}p} \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M} \longrightarrow 0$$

est exacte et donc

$$\frac{u \circ q}{s} = \frac{u}{s} \circ \mathrm{S}^{-1}q = (v \circ \mathrm{S}^{-1}p) \circ \mathrm{S}^{-1}q = v \circ \mathrm{S}^{-1}(p \circ q) = 0.$$

Par suite, $\frac{(u\circ q)(e_j)}{1} = 0$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{N}$ pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$ et il existe donc un élément t de S tel que

$$t(u \circ q)(e_1) = \ldots = t(u \circ q)(e_m) = 0$$

dans N. On obtient ainsi $(tu) \circ q = t(u \circ q) = 0$, ce qui signifie que l'application A-linéaire $tu : \mathrm{A}^n \to \mathrm{N}$ se factorise à travers p : il existe une application A-linéaire $u' : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $tu = u' \circ p$.

En fin de compte, on obtient

$$v \circ \mathrm{S}^{-1}p = \frac{u}{s} = \frac{tu}{st} = \frac{u' \circ p}{st} = \widetilde{\varphi}\left(\frac{u'}{st}\right) \circ \mathrm{S}^{-1}p,$$

d'où

$$v = \widetilde{\varphi}\left(\frac{u'}{st}\right)$$

puisque l'application $\mathrm{S}^{-1}p$ est surjective.

Dans tout ce qui suit, l'anneau A *est supposé noethérien.*

2. Soit M un A-module de type fini tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$ soit un $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$-module libre.

2.1. Considérons un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et un isomorphisme $A_{\mathfrak{p}}$-linéaire $p : (A)^n_{\mathfrak{p}} \cong A^n_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}}$. Désignant par $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de A^n, il existe $s \in A - \mathfrak{p}$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$p(e_i/1) = m_i/s$$

avec $m_1, \dots, m_n \in M$. Soit $\pi : A^n \to M$ l'application A-linéaire définie par $\pi(e_i) = m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; on a $\pi_{\mathfrak{p}} = sp$ par construction, et cette application $A_{\mathfrak{p}}$-linéaire est un isomorphisme puisque s est inversible dans $A_{\mathfrak{p}}$.

Considérons maintenant la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow \ker(\pi) \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{coker}(\pi) \longrightarrow 0 .$$

La localisation étant un foncteur exact, la suite de $A_{\mathfrak{p}}$-modules

$$0 \longrightarrow \ker(\pi)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (A^n)_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \operatorname{coker}(\pi)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

est exacte. Comme $\pi_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme, $\ker(\pi)_{\mathfrak{p}} = \operatorname{coker}(\pi)_{\mathfrak{p}} = 0$. Les A-modules $\ker(\pi)$ et $\operatorname{coker}(\pi)$ sont de type fini par noethérianité de A. En raisonnant comme pour la question 1.2, on en déduit qu'il existe un élément f de $A - \mathfrak{p}$ tel que $f\ker(\pi) = f\operatorname{coker}(\pi) = 0$, d'où $\ker(\pi)[f^{-1}] = \operatorname{coker}(\pi)[f^{-1}] = 0$. Finalement, il découle de nouveau de l'exactitude de la localisation que l'application $A[f^{-1}]$-linéaire $A[f^{-1}]^n \to M[f^{-1}]$ induite par π est un isomorphisme.

2.2. D'après la question précédente, il existe une famille $(f_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)}$ d'éléments de A telle que
(i) $f_{\mathfrak{p}} \in A - \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A ;
(ii) le $A[f_{\mathfrak{p}}^{-1}]$-module $M[f_{\mathfrak{p}}^{-1}]$ soit libre.
L'idéal $\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} A f_{\mathfrak{p}}$ n'est contenu dans aucun idéal premier de A en vertu de la condition (i), donc $\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} A f_{\mathfrak{p}} = A$. Il suffit alors de considérer un sous-ensemble fini I de Spec(A) tel que $1 = \sum_{i \in I} a_i f_i$, $a_i \in A$.

2.3. Soit $p : N \to N'$ une application A-linéaire surjective et soit Q le conoyau de l'application A-linéaire

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_A(M, N'), \quad u \mapsto p \circ u.$$

Le A-module M est projectif si et seulement si $Q = 0$.

Il est clair que tout module libre est projectif : étant donnée une application A-linéaire $v : L \to N'$, on obtient un relèvement $u : L \to N$ de v en fixant une base $\mathscr{B}$ de L et en choisissant un relèvement $u(e) \in N$ de $v(e)$ pour tout $e \in \mathscr{B}$.

Considérons une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de A vérifiant les conditions de la question 2.2. Par exactitude du foncteur de localisation, il découle de la question 1.3 que l'on a $Q[f_i^{-1}] = 0$ pour tout $i \in I$ car le $A[f_i]^{-1}$-module de type fini $M[f_i^{-1}]$ est libre, donc projectif.

Soit $x \in Q$. Comme l'ensemble I est fini, il existe un nombre entier N tel que $f_i^N x = 0$ pour tout $i \in I$. On dispose par hypothèse d'une identité $1 = \sum_{i \in I} a_i f_i$; en l'élevant à la puissance NCard(I), on obtient une identité $1 = \sum_{i \in I} a'_i f_i^N$ et donc $x = 0$. Ainsi, $Q = 0$ et le A-module M est donc projectif.

3. Soit M un A-module de type fini et projectif.

3.1. Il existe par hypothèse un A-module libre de rang fini L et une application A-linéaire surjective $p : L \to M$. Comme M est projectif, id_M se relève en une application A-linéaire $s : M \to L$ et alors $L = \ker(p) \oplus s(M) \simeq \ker(p) \oplus M$.

3.2. Soit $e : A^n_{\mathfrak{p}} \to L_{\mathfrak{p}}$ une application $A_{\mathfrak{p}}$-linéaire telle que l'application $\kappa(\mathfrak{p})$-linéaire

$$e \otimes 1 : \kappa(\mathfrak{p})^n \cong A^n_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p}) \to L_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p}) \cong L \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$$

soit un isomorphisme. On a par construction $L_{\mathfrak{p}}/\operatorname{im}(e) = \mathfrak{p}L_{\mathfrak{p}}/\operatorname{im}(e)$; comme $L_{\mathfrak{p}}/\operatorname{im}(e)$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module de type fini, on en déduit $L_{\mathfrak{p}} = \operatorname{im}(e)$ par application du lemme de Nakayama.

Comme le $A_{\mathfrak{p}}$-module $L_{\mathfrak{p}}$ est libre – donc projectif –,l'application e admet une section $s : L_{\mathfrak{p}} \to A^n_{\mathfrak{p}}$. Puisque $e \circ s = \mathrm{id}_L$, l'application $s \otimes 1$ est l'isomorphisme réciproque de $e \otimes 1$ et il découle de nouveau du lemme de Nakayama que l'application s est surjective. L'injectivité de e s'en déduit aisément : quel que soit $x \in \ker(e)$, il existe $y \in L$ tel que $x = s(y)$, d'où $0 = e(x) = es(y) = y$ et $x = 0$.

Ainsi, l'application e est un isomorphisme.

3.3. Ayant identifié L et $\ker(p) \oplus \mathrm{M}$, on considère une famille finie $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (resp. $(e_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$) d'éléments de $\mathrm{L}_\mathfrak{p}$ relevant une base de $\mathrm{M}\otimes_\mathrm{A}\kappa(\mathfrak{p})$ (resp. de $\ker(p)\otimes_\mathrm{A}\kappa(\mathfrak{p})$). La famille $(e_\mu)_{\mu\in\Lambda\cup\Lambda'}$ relevant une base de $\mathrm{L}\otimes_\mathrm{A}\kappa(\mathfrak{p})$, il s'agit d'une base de $\mathrm{L}_\mathfrak{p}$ en vertu de la question précédente. Comme le sous-$\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{A}_\mathfrak{p}e_\lambda$ de $\mathrm{M}_\mathfrak{p}$ coïncide avec M après tensorisation par $\kappa(\mathfrak{p})$, une nouvelle application du lemme de Nakayama fournit l'identité $\mathrm{M}_\mathfrak{p} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{A}_\mathfrak{p}e_\lambda$ et donc $\mathrm{M}_\mathfrak{p}$ est un $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module libre.

Remarque conclusive : Nous venons de prouver que, pour qu'un A-module de type fini soit projectif, il faut et il suffit que tous son localisé en chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de A soit un $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-module libre.

Exercice C — 1. Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soient $f_1,\ldots,f_n$ des éléments de $\mathfrak{m}$.

1.1. Les idéaux premiers de $\mathrm{A}/(f_1,\ldots,f_n)$ s'identifient canoniquement aux idéaux premiers de A contenant $(f_1,\ldots,f_n)$. S'il existe un nombre entier $\mathrm{N}\geqslant 1$ tel que $\mathfrak{m}^\mathrm{N}\subset(f_1,\ldots,f_n)$, alors tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contenant $(f_1,\ldots,f_n)$ contient $\mathfrak{m}^\mathrm{N}$, donc également $\mathfrak{m}$ par primalité, et par suite $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$. Ceci montre que le spectre de l'anneau $\mathrm{A}/(f_1,\ldots,f_n)$ est réduit à un point, d'où $\dim(A/(f_1,\ldots,f_n))=0$.

1.2. Supposons réciproquement que l'anneau $\mathrm{A}'=\mathrm{A}/(f_1,\ldots,f_n)$ soit de dimension 0 et notons $\mathfrak{m}'=\mathfrak{m}/(f_1,\ldots,f_n)$ son idéal maximal. Ceci équivaut à dire que tous les idéaux premiers de A' sont maximaux et, comme A' est local, son idéal maximal $\mathfrak{m}'$ est donc son unique idéal premier. Le nilradical d'un anneau étant l'intersection de ses idéaux premiers, il en découle que tout élément de $\mathfrak{m}'$ est nilpotent. L'anneau A étant noethérien, A' l'est également et l'idéal $\mathfrak{m}'$ est donc de type fini, ce qui permet de trouver un nombre entier $\mathrm{N}\geqslant 1$ tel que $\mathfrak{m}'^\mathrm{N}=0$, c'est-à-dire tel que $\mathfrak{m}^\mathrm{N}\subset(f_1,\ldots,f_n)$.

On peut déduire des questions précédentes une caractérisation de la dimension de A :

$$\dim(\mathrm{A})=\min\{r \mid \text{ il existe } f_1,\ldots,f_r\in\mathrm{A} \text{ et un entier N tels que } \mathfrak{m}^\mathrm{N}\subset(f_1,\ldots,f_r)\subset\mathfrak{m}.\}$$

Comme l'anneau A est noethérien, l'idéal $\mathfrak{m}$ est de type fini et le membre de droite est donc bien défini (considérer le cardinal d'une famille génératrice finie de $\mathfrak{m}$).

L'inégalité $\leqslant$ est une conséquence immédiate de 1.1. *Pour obtenir l'inégalité $\geqslant$ à partir de 1.2., il faut invoquer l'existence d'une famille $(f_1,\ldots,f_d)$ d'éléments de $\mathfrak{m}$ avec $d=\dim(\mathrm{A})$ et $\dim(\mathrm{A}/(f_1,\ldots,f_d))=0$; en raisonnant par récurrence sur $\dim(\mathrm{A})$, il suffit de prouver l'assertion suivante : si $\dim(\mathrm{A})\geqslant 1$, alors il existe $f\in\mathfrak{m}$ tel que*

$$\dim(\mathrm{A})=\dim(\mathrm{A}/(f))+1.$$

Ceci aurait dû faire l'objet d'une question indépendante... [(1)]

2. Posons $d=\dim(\mathrm{A})$ et $\delta=\dim(\mathrm{B}\otimes_\mathrm{A}k)$. En vertu de la question précédente appliquée aux anneaux locaux noethériens A et $\mathrm{B}\otimes_\mathrm{A}k=\mathrm{B}/\mathfrak{m}\mathrm{B}$, il existe des éléments $t_1,\ldots,t_d$ de $\mathfrak{m}$, des éléments $s_1,\ldots,s_\delta$ de $\mathfrak{n}$ et un nombre entier N tels que $\mathfrak{m}^\mathrm{N}\subset(t_1,\ldots,t_d)$ et $\mathfrak{n}^\mathrm{N}\subset(s_1,\ldots,s_\delta)+f(\mathfrak{m})\mathrm{B}$. On a alors

$$\mathfrak{n}^{2\mathrm{N}}\subset(s_1,\ldots,s_\delta)+f(\mathfrak{m}^\mathrm{N})\mathrm{B}\subset(s_1,\ldots,s_\delta,f(t_1),\ldots,f(t_d))\subset\mathfrak{n},$$

donc $\dim(\mathrm{B})\leqslant d+\delta$.

3. Soit R un anneau noethérien. On considère un idéal premier $\mathfrak{q}$ de R[X] et on pose $\mathfrak{p}=\mathrm{R}\cap\mathfrak{q}$. L'homomorphisme canonique $\mathrm{R}\to\mathrm{R}[\mathrm{X}]$ induit un homomorphisme $f:\mathrm{R}_\mathfrak{p}\to\mathrm{R}[\mathrm{X}]_\mathfrak{q}$ tel que $f(\mathfrak{p})\subset\mathfrak{q}$, d'où

$$\dim(\mathrm{R}[\mathrm{X}]_\mathfrak{q})\leqslant\dim(\mathrm{R}_\mathfrak{p})+\dim(\mathrm{R}[\mathrm{X}]_\mathfrak{q}\otimes_\mathrm{R}\kappa(\mathfrak{p})).$$

---

(1) Si A est intègre, c'est une conséquence directe de l'*Hauptidealsatz* de Krull : n'importe quel élément f de $\mathfrak{m}-\{0\}$ convient, et il en existe puisque $\dim(\mathrm{A})\geqslant 1$. En général, on considère tous les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}$ de A tels que $\dim(\mathrm{A})=\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{p})$, qui sont en nombre fini puisque A est noethérien. Notant $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_m$ ces idéaux premiers, on a $\mathfrak{p}_i\neq\mathfrak{m}$ pour tout i car $\dim(\mathrm{A})\geqslant 1$. Il existe alors $f\in\mathfrak{m}$ n'appartenant à aucun $\mathfrak{p}_i$: c'est clair si $m=1$, et si le résultat est démontré pour $m\geqslant 1$, on l'obtient pour $m+1$ en considérant $f=f'+g_1\ldots g_m$ ou $f=f'$, avec $f'\in\mathfrak{m}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{p}_m$ et $g_i\in\mathfrak{p}_i\cap(\mathrm{A}-\mathfrak{p}_{m+1})$, selon que f' appartienne ou non à $\mathfrak{p}_{m+1}$. Avec ce choix de f, $\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i+(f))=\dim((\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i)/\overline{f})=\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i)+1$ en vertu du *Hauptidealsatz* et donc $\dim(\mathrm{A})=\dim(\mathrm{A}/(f))+1$.

L'anneau $R[X]_{\mathfrak{q}} \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ s'identifiant canoniquement au localisé de $\kappa(\mathfrak{p})[X]$ en l'idéal premier $\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}/\mathfrak{p}R[X]$,

$$\dim\left(R[X]_{\mathfrak{q}} \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})\right) = \dim(\kappa(\mathfrak{p})[X]_{\overline{\mathfrak{q}}}) \leqslant \dim(\kappa(\mathfrak{p})[X]) = 1.$$

On obtient ainsi

$$\dim(R[X]_{\mathfrak{q}}) \leqslant \dim(R_{\mathfrak{p}}) + 1 \leqslant \dim(R) + 1$$

et donc

$$\dim(R[X]) = \sup_{\mathfrak{q}} \dim(R[X]_{\mathfrak{q}}) \leqslant \dim(R) + 1.$$

L'inégalité $\dim(R) + 1 \leqslant \dim(R[X])$ étant déjà connue (et élémentaire), il vient finalement

$$\dim(R[X]) = \dim(R) + 1.$$