ENS Lyon **Algèbre approfondie**
M1 **2008-2009**

FEUILLE 4

Exercice 1 — Soit A un anneau et soit M un A-module de type fini. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on pose $\mathrm{M}(\mathfrak{p}) = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \kappa(\mathfrak{p})$.

On rappelle qu'une fonction réelle f sur un espace topologique X est *semi-continue supérieurement* si, pour tout nombre réel λ, $f^{-1}(]-\infty, \lambda[)$ est une partie ouverte de X.

(i) Vérifier que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, le $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel $\mathrm{M}(\mathfrak{p})$ est de dimension finie.

(ii) Démontrer que la fonction

$$\mathrm{d}_{\mathrm{M}} : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathbb{Z}, \ \ \mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} \mathrm{M}(\mathfrak{p})$$

est semi-continue supérieurement.

Exercice 2 — Une partie C d'un espace topologique X est dite *constructible* si C est une réunion finie de parties localement fermées.

1. Soit k un corps. Déterminer l'image de l'application $\mathrm{Spec}(k[u,v]) \to \mathrm{Spec}(k[x,y,z])$ associée à l'homomorphisme canonique

$$k[x,y,z] \to k[u,v], \ \ (x,y,z) \mapsto (u, uv, 0)$$

et vérifier qu'il s'agit d'une partie constructible de $\mathrm{Spec}(k[x,y,z])$.

2. (*Principe de récurrence noethérienne*.) Soit X un espace topologique *noethérien*, c'est-à-dire tel que toute suite décroissante de fermés soit stationnaire. Considérons une propriété **P** des fermés de X et supposons qu'un fermé Y vérifie **P** lorsque tel est la cas pour tous ses fermés stricts. Démontrer que tous les fermés de X vérifient **P**.

3. Soit A un anneau noethérien et soit $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un homomorphisme d'anneaux faisant de B une A-algèbre de type fini. Les questions suivantes conduisent à la démonstration du théorème suivant de C. CHEVALLEY : *l'image de l'application* ${}^a\varphi$ *est une partie constructible de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

(i) Justifier que l'on peut se ramener au cas où les anneaux A, B sont intègres et l'homomorphisme φ injectif.

(ii) Démontrer que l'image de l'application ${}^a\varphi$ contient un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. (*Indication* : appliquer le lemme de normalisation de Noether à la fibre de ${}^a\varphi$ au-dessus du point générique de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.)

(iii) Conclure en utilisant le principe de récurrence noethérienne (question 2).

Exercice 3 — Soit A un anneau noethérien. Démontrer qu'il existe une suite croissante d'idéaux

$$(0) = \mathfrak{I}_0 \subset \mathfrak{I}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{I}_n = \mathrm{A}$$

telle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, le A-module $\mathfrak{I}_{k+1}/\mathfrak{I}_k$ soit isomorphe au quotient de A par un idéal premier.

(*Indication* : étant donné un A-module M, démontrer que l'ensemble

$$\{\mathrm{ann}(x) \mid x \in \mathrm{M}, \ x \neq 0\}$$

possède un élément maximal $\mathfrak{p}$ puis vérifier que l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier.)

Exercice 4 — Un anneau A est dit *artinien* si toute chaîne décroissante d'idéaux est stationnaire.

1. Démontrer qu'un anneau artinien intègre est un corps. (*Indication* : étant donné $a \in \mathrm{A}$, considérer la suite d'idéaux $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.) En déduire que tout idéal premier d'un anneau artinien est maximal.

2. Étant donnée une suite $(\mathfrak{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux maximaux de A, démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{n_0} = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_n$ pour tout $n \geqslant n_0$. En déduire que le spectre de A est fini.

3. Soit $\mathfrak{N}$ le nilradical de A.
(a) Montrer qu'il existe un nombre entier $s \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{N}^{s+1} = \mathfrak{N}^s$.
(b) Si $\mathfrak{N}^s \neq (0)$, justifier qu'il existe un idéal $\mathfrak{I}$ de A tel que $\mathfrak{I}\mathfrak{N}^s \neq (0)$ et minimal pour cette propriété.
(c) Montrer que l'idéal $\mathfrak{I}$ est principal, engendré par un élément a que l'on peut écrire sous la forme $a = az$ avec $z \in \mathfrak{N}$. En déduire $a = 0$ et conclure que l'on a $\mathfrak{N}^s = (0)$.

4. Étant donné un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, démontrer qu'il existe un élément de $\mathrm{A} - \mathfrak{m}$ appartenant à chaque idéal maximal $\mathfrak{n}$ de A distinct de $\mathfrak{m}$. En déduire que l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{A} \to \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(\mathrm{A})} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$$

est un isomorphisme.

Exercice 5 — Un A-module M est dit *simple* s'il ne possède pas d'autre sous-module que (0) et M ; on dit que M est de *longueur finie* s'il existe une suite de composition de sous-modules $(0) = \mathrm{M}_0 \subset \mathrm{M}_1 \subset \dots \subset \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$ à quotients simples.

Démontrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes (théorème d'Akizuki).
(i) L'anneau A est noethérien et de dimension 0.
(ii) Le A-module A est de longueur finie.
(iii) L'anneau A est artinien.

(*Indications*. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) se déduit directement de l'exercice 3. Les implications (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) sont faciles. Enfin, l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii) se déduit aisément des résultats de l'exercice 4 en considèrant la suite de composition

$$(0) = \mathfrak{N}^s \subset \mathfrak{N}^{s-1} \subset \dots \subset \mathfrak{N} \subset \mathrm{A}$$

et en observant que les quotients successifs sont des modules de longueur finie sur $\mathrm{A}/\mathfrak{N} \simeq \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}(\mathrm{A})} \mathrm{A}/\mathfrak{m}$.)

Exercice 6 — Soit X un espace topologique. La *dimension* (ou *dimension de Krull*) de X est la borne supérieure des longueurs des chaînes de fermés irréductibles de X. Par ailleurs, étant donné un point $x \in \mathrm{X}$, on pose

$$\dim_x(\mathrm{X}) = \inf_{\mathrm{U}} \dim(\mathrm{U}),$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X.
(i) Démontrer que l'on a $\dim(\mathrm{Y}) \leqslant \dim(\mathrm{X})$ pour toute partie Y de X.
(ii) Démontrer que l'on a $\dim(\mathrm{X}) = \sup_{x\in\mathrm{X}} \dim_x(\mathrm{X})$.
(iii) Si X est un espace de Kolmogoroff noethérien, démontrer qu'un point x de X est isolé si et seulement si $\dim_x(\mathrm{X}) = 0$. (*Indication* : considérer une composante irréductible de X contenant x.)
(iv) Démontrer que la fonction $\mathrm{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $x \mapsto \dim_x(\mathrm{X})$, est semi-continue supérieurement.