FEUILLE 7

Exercice 1 — Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout complexe simplicial C :

(i) quels que soient les sommets x, y de C, il existe un chemin dans C reliant x et y ;
(ii) C est connexe ;
(iii) le 1-squelette $C^{(1)}$ de C est connexe.

Exercice 2 — Soit C un complexe simplicial et soit $C^{(2)}$ son 2-squelette.

Étant donné un point s de C, démontrer que l'inclusion canonique $C^{(2)} \hookrightarrow C$ induit un isomorphisme de groupes fondamentaux $\pi_1(C^{(2)}, s) \simeq \pi_1(C, s)$.

Exercice 3 — 1. Démontrer qu'une réunion croissante d'arbres est un arbre.

2. Soit $C = C(\Sigma, S)$ un complexe simplicial connexe et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de sous-arbres de C deux à deux disjoints. Démontrer qu'il existe un sous-arbre de C contenant tous les T_i. (*Indication* : on pourra considérer la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur Σ correspondant à la partition $\{\{T_i\}_{i\in I}, \Sigma - \bigcup_i T_i\}$ ainsi que l'application simpliciale canonique $C \to C/\mathscr{R}$.)

Exercice 4 — Soit G un graphe.

1. L'objet de cette question est d'établir les deux assertions suivantes :

– un chemin $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ de longueur $n \geqslant 2$ est réduit si et seulement s'il ne contient pas de segment de la forme $[a, a]$ ou $[a, b, a]$;
– chaque classe d'homotopie de chemins dans G contient un *unique* chemin réduit.

1.1. Soient γ, γ' et γ'' trois chemins dans G. On suppose γ élémentairement équivalent à γ' et γ'' avec

$$\ell g\ (\gamma') < \ell g\ (\gamma) \quad \text{et} \quad \ell g\ (\gamma'') < \ell g\ (\gamma).$$

Démontrer qu'il existe un chemin τ élémentairement équivalent à γ' et γ'' avec

$$\ell g\ (\tau) < \ell g\ (\gamma') \quad \text{et} \quad \ell g\ (\tau) < \ell g\ (\gamma'').$$

1.2. Soient γ et γ' deux chemins distincts dans G, de longueur au moins 2 et sans segment de la forme $[a, a]$ ou $[a, b, a]$. On suppose que γ et γ' sont homotopes. Considérons une chaîne de chemins $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n = \gamma'$ dans G telle que

- les chemins γ_i et γ_{i+1} soient élémentairement équivalents pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$;
- la somme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \ell g\ (\gamma_i)$ soit minimale.

(i) Justifier que l'on a $n \geqslant 3$, $\ell g\ (\gamma_2) > \ell g\ (\gamma_1)$ et $\ell g(\gamma_{n-1}) > \ell g(\gamma_n)$.
(ii) En déduire qu'il existe $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ tel que

$$\ell g\ (\gamma_{i-1}) < \ell g(\gamma_i) \quad \text{et} \quad \ell g\ (\gamma_{i+1}) < \ell g\ (\gamma_i).$$

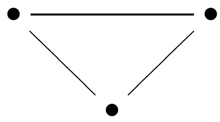
(iii) En utilisant la question 1.1, aboutir à une contradiction.

1.3. Conclure.

2. Soit s un sommet de G et soit γ un lacet réduit issu de s. Si $\ell g\ (\gamma) \geqslant 2$, démontrer que l'image de γ dans $\pi_1(\mathrm{C}, s)$ est non triviale.

Exercice 5 — Soit $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\Sigma, \mathrm{S})$ le complexe simplicial défini par $\Sigma = \{a, b, c\}$ et

$$\mathrm{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$



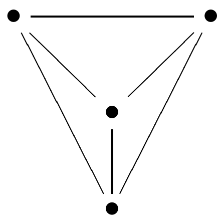
On note γ_0 la classe du lacet $[a, b, c, a]$ dans $\pi_1(\mathrm{C}, a)$. Démontrer que l'application

$$\mathbb{Z} \to \pi_1(\mathrm{C}, a), \quad n \mapsto \gamma_0^n$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 6 — Soit $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\Sigma, \mathrm{S})$ le complexe simplicial défini par $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ et

$$\mathrm{S} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}.$$



Vérifier que les lacets $\gamma = [a, b, d, a]$ et $\gamma' = [a, c, d, a]$ sont réduits et homotopes.