FEUILLE 8

Exercice 1. — Soit G un groupe de type fini. Démontrer que tout sous-groupe d'indice fini de G est encore de type fini.

Exercice 2. — Soit (C,s) un graphe pointé connexe dénombrable. Démontrer qu'il existe un graphe pointé (C',s') satisfaisant aux deux conditions suivantes :
(i) $\pi_1(C',s') \simeq \pi_1(C,s)$;
(ii) chaque sommet de C' appartient à trois arêtes au plus.

Exercice 3. — Soit C un complexe simplicial connexe et soit G un groupe agissant sur C. On définit une relation d'équivalence sur les sommets de C par $x \sim y$ si et seulement si x et y sont dans la même orbite sous G. On suppose que cette relation d'équivalence vérifie la propriété suivante : si $x \sim y$ et $x \neq y$, alors il n'existe pas de simplexe s contenant x et de simplexe s' contenant y tels que $s \cap s'$ soit non vide.

Démontrer que la projection canonique $C \to C/\sim$ est un revêtement.

Exercice 4. — Cet exercice a pour objet de décrire un complexe simplicial de dimension 2 dont le groupe fondamental est donné sous forme d'une présentation $\langle X, R\rangle$. On suppose R fini pour simplifier.

Soit $n \geqslant 3$ un nombre entier. On désigne par D_n le complexe ayant $2n+1$ sommets $p, q_1, \ldots, q_{n-1}, r_1, \ldots, r_{n-1}$ et dont les 2-simplexes sont les $\{p, q_i, q_{i+1}\}$, $\{q_i, q_{i+1}, r_{i+1}\}$ et $\{q_i, r_i, r_{i+1}\}$, où i parcourt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On désigne par R_n le sous-complexe de D_n obtenu en enlevant p et tous les simplexes le contenant. On note finalement ∂D_n le sous-complexe plein de D_n de sommets $\{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$.

1. Déterminer les groupes fondamentaux de D_n et de R_n.

Considérons maintenant un complexe simplicial K ainsi qu'un chemin fermé $c = [a_0, \ldots, a_{n-1}, a_0]$ dans K avec $n \geqslant 3$.

Soit K_c le complexe simplicial obtenu en faisant le quotient de $K \sqcup D_n$ par la relation d'équivalence identifiant les points a_i et r_i pour tout i. On désigne par K'_c le sous-complexe image de $K \sqcup R_n$.

2. Démontrer que l'inclusion $K'_c \hookrightarrow K$ induit un isomorphisme de $\pi_1(K'_c, a_0)$ sur $\pi_1(K, a_0)$.

3. Soit K''_c le sous-complexe plein de K_c de sommets $\{p, q_0, \dots, q_{n-1}\}$. Déterminer $K'_c \cup K''_c$ et $K'_c \cap K''_c$.

4. Calculer $\pi_1(K'_c \cap K''_c, a_0)$ et déterminer l'image de l'homomorphisme

$$\pi_1(K'_c \cap K''_c, a_0) \to \pi_1(K'_c, a_0)$$

induit par l'inclusion $K'_c \cap K''_c \hookrightarrow K'_c$.

5. En déduire $\pi_1(K_c, a_0)$ en fonction de $\pi_1(K, a_0)$.

Soit $G = \langle X, R \rangle$ un groupe défini par générateurs et relations. Pour simplifier, on supposer que R est un ensemble fini.

6. Décrire un procédé de construction d'un complexe simplicial de dimension 2 dont le groupe fondamental est isomorphe à G.

Exercice 5. — Donner un exemple de complexe simplicial de groupe fondamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6. — Soit (C, s) un complexe simplicial connexe pointé de dimension 2 et soit H un sous-groupe de $\pi_1(C, s)$. On note $C^{(1)}$ le 1-squelette de C.

1. Montrer que l'inclusion $C^{(1)} \hookrightarrow C$ induit un homomorphisme surjectif $\pi_1(C^{(1)}, s) \to \pi_1(C, s)$.

Soit $f^1 : ((C^1)', s') \to (C^1, s)$ un revêtement connexe tel que f^1 induise un isomorphisme entre $\pi_1((C^1)', s')$ et le sous-groupe H^1 de $\pi_1(C^1, s)$ image réciproque de H.

2. Démontrer que le revêtement $f^1 : (C^1)' \to C^1$ s'étend de manière unique en un revêtement $f : C' \to C$ tel que $(C^1)' = (C')^1$.

3. Démontrer que l'homomorphisme $f^* : \pi_1(C', s') \to \pi_1(C, s)$ induit par f est un isomorphisme de $\pi_1(C', s')$ sur H.

4. Étendre la correspondance galoisienne entre revêtements et sous-groupes du groupe fondamental aux complexes simpliciaux de dimension 2, puis aux complexes simpliciaux de dimension quelconque.