Un espace topologique est *quasi compact* si l'on peut extraire de tout recouvrement ouvert un sous-recouvrement fini. La quasi-compactité du spectre premier d'un anneau est un fait remarquable qui joue un rôle crucial en géométrie algébrique ; dans ce qui suit, on se propose de l'illustrer en montrant que l'on peut en déduire très simplement l'un des théorèmes de base de la logique mathématique, le *théorème de compacité du calcul propositionnel*.

Théorème de compacité du calcul propositionnel — *Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de formules du calcul propositionnel. Pour que $\mathscr{A}$ soit non contradictoire, il faut et il suffit que tout sous-ensemble fini de $\mathscr{A}$ soit non contradictoire.*

Il convient de préciser que le calcul propositionnel est extrêmement rudimentaire et qu'il est nécessaire de l'étendre en lui adjoignant des quantificateurs, le résultat obtenu étant connu sous le nom de *calcul des prédicats*. Pour tout cela, on pourra consulter l'ouvrage [1].

La troisième section de ce texte porte sur le *théorème de Stone*, qui est historiquement l'une des premières apparitions du spectre premier d'un anneau commutatif.

1. Le calcul propositionnel

(1.1) *Morphologie* — On considère un ensemble non vide P de *variables propositionnelles*, des symboles $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$, appelés *connecteurs*, ainsi que des parenthèses $($, $)$.

Une *formule propositionnelle* est une suite finie d'éléments de P, de connecteurs et de parenthèses, obtenue à partir des règles de formation suivantes :

– tout élément de P est une formule propositionnelle ;
– si F est une formule propositionnelle, $\neg$F en est également une ;
– si F et G sont deux formules propositionnelles, $(\mathrm{F} \vee \mathrm{G})$, $(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G})$, $(\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{G})$ et $(\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{G})$ en sont également.

Exemple. Si p et q sont des éléments de P, $((p \rightarrow q) \vee \neg q)$ est une formule propositionnelle.

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des formules propositionnelles.

(1.2) *Sémantique* — Une *assignation* ou *distribution de valeurs de vérité* est une application $v : \mathrm{P} \rightarrow \{0,1\}$. On démontre que toute assignation v admet un unique prolongement $\tilde{v} : \mathscr{F} \rightarrow \{0,1\}$ satisfaisant aux conditions suivantes : pour toutes formules $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathscr{F}$,

(i) $\tilde{v}(\neg \mathrm{F}) = 1$ si et seulement si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 0$;
(ii) $\tilde{v}(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}) = 1$ si et seulement si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = \tilde{v}(\mathrm{G}) = 1$;
(iii) $\tilde{v}(F \vee \mathrm{G}) = 0$ si et seulement si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = \tilde{v}(\mathrm{G}) = 0$;
(iv) $\tilde{v}(\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{G}) = 0$ si et seulement si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 1$ et $\tilde{v}(\mathrm{G}) = 0$;
(v) $\tilde{v}(\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{G}) = 1$ si et seulement si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = \tilde{v}(\mathrm{G})$.

Étant donnée une assignation v, une formule $\mathrm{F} \in \mathscr{F}$ est dite *vraie* si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 1$, *fausse* sinon. Les règles qui précèdent signifient que l'on prolonge l'assignation v à $\mathscr{F}$ en interprétant respectivement les connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ par la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence usuelles.

Une *tautologie* est une formule $\mathrm{F} \in \mathscr{F}$ vraie pour toute assignation. Deux formules $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathscr{F}$ sont dites *logiquement équivalentes* si la formule $(\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{G})$ est une tautologie, ce qui revient à dire que l'on a $\tilde{v}(\mathrm{F}) = \tilde{v}(\mathrm{G})$ pour toute assignation v ; on note $\mathrm{F} \sim \mathrm{G}$ cette relation d'équivalence et on désigne par $\mathrm{cl}(\mathrm{F})$ la classe d'équivalence de la formule F.

Exemple. Pour toute variable $p \in \mathrm{P}$, la formule $(p \to p)$ est une tautologie.

Remarque. Vu l'interprétation des connecteurs que l'on vient de décrire, ceux-ci ne sont bien entendu pas indépendants du point de vue de l'équivalence logique. Par exemple, pour toutes formules $\mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathscr{F}$, $(\mathrm{F} \to \mathrm{G})$ et $(\mathrm{G} \vee (\neg\mathrm{F} \wedge \neg\mathrm{G}))$ sont deux formules logiquement équivalentes ; il en est de même de $(\mathrm{F} \vee \mathrm{G})$ et $(\neg\mathrm{F} \to \mathrm{G})$, ainsi que de $(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G})$ et $\neg(\mathrm{F} \to \neg\mathrm{G})$.

(1.3) *Satisfaction* — Un ensemble $\mathscr{A}$ de formules propositionnelles est *satisfait* pour une assignation v si $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 1$ pour toute formule $\mathrm{F} \in \mathscr{F}$. On dit que $\mathscr{A}$ est *satisfaisable* ou *non contradictoire* s'il est satisfait pour au moins une assignation, *contradictoire* s'il n'est satisfait pour aucune assignation.

L'énoncé du théorème de compacité fait maintenant sens. Une façon de le démontrer est d'observer que l'ensemble quotient $\mathscr{B} = \mathscr{F} / \sim$ des formules propositionnelles modulo équivalence logique est naturellement muni d'une structure d'anneau commutatif et d'invoquer la quasi-compacité de $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$.

2. Anneaux de Boole

(2.1) *Anneau de Boole* — On appelle *anneau de Boole* un anneau A, unitaire mais non nécessairement commutatif, dans lequel tout élément a est idempotent : $a^2 = a$. On a $2 = 0$ dans A car $4 = 2^2 = 2$, et A est en fait commutatif puisque $ab - ba = ab + ba = (a+b)^2 - (a+b) = 0$ pour tous $a, b \in \mathrm{A}$. Ainsi, tout anneau de Boole est une algèbre commutative sur le corps fini $\mathbb{F}_2$.

Exemple. Si E est un ensemble, les lois

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^{\mathrm{c}}) \cup (\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{B}) \quad \text{et} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$$

font de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties de E un anneau de Boole.

On vérifie sans difficulté que l'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{F} / \sim$ est un anneau de Boole pour les lois

$$\mathrm{cl}(\mathrm{F}) + \mathrm{cl}(\mathrm{G}) = \mathrm{cl}((\mathrm{F} \wedge \neg\mathrm{G}) \vee (\neg\mathrm{F} \wedge \mathrm{G})) = \mathrm{cl}(\neg(\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{G}))$$

et

$$\mathrm{cl}(\mathrm{F})\mathrm{cl}(\mathrm{G}) = \mathrm{cl}(\mathrm{F} \wedge \mathrm{G}),$$

1 étant la classe d'une quelconque tautologie $\mathrm{H} \in \mathscr{F}$ et 0 celle de $\neg\mathrm{H}$. Par ailleurs, il revient au même de se donner une assignation $v : \mathrm{P} \to \{0, 1\}$ ou un homomorphisme d'anneaux $\tilde{v} : \mathscr{B} \to \mathbb{F}_2$.

(2.2) *Compacité du spectre* — Dans un anneau de Boole A, tout idéal premier est maximal ; ceci est une manifestation du fait que le seul anneau de Boole intègre est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$. Il en découle que le spectre de A est un espace topologique *séparé*[1], donc *compact*.

Dans la situation qui nous intéresse, le spectre de $\mathscr{B}$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ann}}(\mathscr{B},\mathbb{F}_2)$, donc à l'ensemble des assignations $v : \mathrm{P} \to \{0,1\}$.

(2.3) *Démonstration du théorème de compacité* — Pour toute formule propositionnelle F, les assignations v telles que $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 1$ sont précisément les points du fermé $\mathrm{V}(\mathrm{cl}(\neg\mathrm{F}))$. Par suite, pour qu'un ensemble $\mathscr{A}$ de formules propositionnelles soit non contradictoire, il faut et il suffit que l'intersection de la famille de fermés $\{\mathrm{V}(\mathrm{cl}(\neg\mathrm{F}))\}_{\mathrm{F}\in\mathscr{A}}$ soit non vide. Comme l'espace topologique $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ est compact, cette condition équivaut à la non-vacuité de l'intersection de toute sous-famille finie, c'est-à-dire au caractère non contradictoire de tout sous-ensemble fini de $\mathscr{A}$.

Remarque. Le théorème de compactité peut également se déduire du théorème de Tychonoff, affirmant qu'un produit d'espaces compacts est un espace compact. En effet, si $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète, l'ensemble des assignations $\{0,1\}^{\mathrm{P}}$ est un espace compact (homéomorphe au spectre de $\mathscr{B}$) et l'argument précédent s'applique.

3. Le théorème de Stone

(3.1) *Treillis* — On appelle *treillis* un ensemble non vide et partiellement ordonné dans lequel toute partie finie admet une borne inférieure et une borne supérieure ; un treillis possède en particulier un plus grand élément 1 et un plus petit élément 0. Un treillis est *distributif* si les inf se distribuent sur les sup (i.e. $\inf(\sup(a,b),c) = \sup(\inf(a,c),\inf(b,c))$ et il est *complémenté* s'il existe pour tout élément a un élément a^{c} tel que $\inf(a,a^{\mathrm{c}}) = 0$ et $\sup(a,a^{\mathrm{c}}) = 1$. On dispose d'une notion évidente de morphisme de treillis : c'est une application croissante préservant les bornes inférieures et supérieures finies.

Exemples. (1) Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ des parties de E muni de l'inclusion est un treillis distributif complémenté.
(2) Ordonné par inclusion, l'ensemble des parties ouvertes et fermées d'un espace topologique est un treillis distributif complémenté.

La catégorie des anneaux de Boole est équivalente (et même isomorphe) à celle des treillis distributifs complémentés :

- à un anneau de Boole A est associé le treillis distributif complémenté $(\mathrm{A},\leqslant,\mathrm{c})$, où $a \leqslant b$ ssi $b|a$ et $a^{\mathrm{c}} = 1-a$;
- à un treillis distributif complémenté $(\mathrm{T},\leqslant,\mathrm{c})$ correspond l'anneau de Boole $(\mathrm{T},+,.,0,1)$, où $a+b = \sup(\inf(a,b^{\mathrm{c}}),\inf(a^{\mathrm{c}},b))$ et $a.b = \inf(a,b)$.

[1] *Le spectre d'un anneau commutatif* A *est séparé si et seulement si tous ses points sont fermés*. Comme la propriété considérée est purement topologique, il est loisible de remplacer A par $\mathrm{A}/\mathfrak{N}(\mathrm{A})$ et donc de supposer que l'anneau A est *réduit*. La condition envisagée est trivialement nécessaire car les points d'un espace séparé sont fermés. Supposons réciproquement que tous les points de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ soient fermés, i.e. que tous les idéaux premiers de A soient maximaux. Considérons deux idéaux maximaux distincts $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ de A et soit f un élément de $\mathfrak{m}\cap(\mathrm{A}-\mathfrak{m}')$. Les idéaux premiers de l'anneau localisé $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ s'identifiant aux idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est le seul idéal premier de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$. Comme tout localisé d'un anneau réduit est réduit, $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{N}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}) = (0)$, donc $f/1 = 0$ dans $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ et il existe par suite g dans $\mathrm{A}-\mathfrak{m}$ tel que $gf = 0$. On a alors $\mathrm{D}(f)\cap\mathrm{D}(g) = \varnothing$, $\mathfrak{m}\in\mathrm{D}(g)$ et $\mathfrak{m}'\in\mathrm{D}(f)$, ce qui prouve que $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est séparé.

(3.2) *Le théorème de Stone* — On voit facilement que l'anneau de Boole $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \Delta, \cap, \varnothing, \mathrm{E})$ des parties d'un ensemble (non vide) E n'est pas de la forme la plus générale ; en effet, le treillis correspondant possède des éléments minimaux non nuls (les singletons) alors qu'il existe des treillis distributifs complémentés n'en possédant aucun.

Exemple. Si l'ensemble de variables propositionnelles P est infini, aucune formule propositionnelle F ne peut définir un élément minimal non nul dans le treillis correspondant à $\mathscr{B}$. En effet, l'hypothèse $\mathrm{cl}(\mathrm{F}) \neq 0$ signifie qu'il existe au moins une distribution de valeurs de vérité v sur P telle que $\tilde{v}(\mathrm{F}) = 1$; si p est un élément de P ne figurant pas dans F, on voit alors aisément que l'on peut définir des distributions de valeurs de vérité w et w' sur P telles que $\tilde{w}(\mathrm{F} \vee p) = 1 - \tilde{w}(\mathrm{F}) = 0$ et $\tilde{w'}(\mathrm{F} \vee p) = 1$, d'où l'on déduit que $\mathrm{cl}(\mathrm{F})$ est un diviseur strict de $\mathrm{cl}(\mathrm{G})$. Ceci montre que $\mathrm{cl}(\mathrm{F})$ n'est pas minimal dans le treillis correspondant à $\mathscr{B}$.

L'observation précédente montre qu'un treillis distributif complémenté ne peut en général pas se réaliser comme le treillis des parties d'un ensemble. Le *théorème de Stone* affirme que tout treillis distributif complémenté peut en revanche s'identifier au treillis des parties ouvertes et fermées d'un espace topologique convenable, espace que l'on peut en outre supposer compact et totalement discontinu (i.e. admettant une base formée d'ouverts fermés).

Théorème de Stone — *Le foncteur* Spec : $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Top}^{\mathrm{o}}$ *induit une anti-équivalence entre la catégorie des anneaux de Boole et la catégorie des espaces topologiques compacts totalement discontinus. On obtient un quasi-inverse de* Spec *sur cette sous-catégorie de* **Top** *en associant à tout espace topologique compact et totalement discontinu* E *l'anneau de Boole correspondant au treillis des parties ouvertes et fermées de* E.

Démonstration. Notons **Boole** la catégorie des anneaux de Boole, $\mathbf{Tr_{dc}}$ celle des treillis distributifs complémentés et désignons par F le foncteur $\mathbf{Top}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{Tr_{dc}}$ associant à un espace topologique le treillis de ses parties ouvertes et fermées. On dispose d'un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Top}^{\mathrm{o}} \arrow[dr, "\mathrm{F}"] & \\ \mathbf{Boole} \arrow[ur, "\mathrm{Spec}"] \arrow[rr, "\sim", "\iota"'] & & \mathbf{Tr_{dc}} \end{tikzcd}$$

dans lequel ι est l'isomorphisme de catégories défini en (3.1).

Pour tout anneau A, l'application $e \mapsto \mathrm{D}(e)$ réalise une bijection entre l'ensemble des éléments idempotents de A et l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.[2] Lorsque A est un anneau de Boole, on obtient donc une bijection entre A et l'ensemble des parties ouvertes et fermées de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

Quel que soit l'anneau A, $\mathrm{D}(a) \subset \mathrm{D}(b)$ si et seulement si l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathrm{A}[a^{-1}]$ se factorise à travers $\mathrm{A}[b^{-1}]$, donc si et seulement si b est inversible dans $\mathrm{A}[a^{-1}]$, condition qui équivaut à une identité de la forme $bc - a^n = 0$ dans A avec $c \in \mathrm{A}$ et $n \geq 0$. Lorsque A est un anneau de Boole, $a^2 = a$ et il y donc deux cas possibles : $bc = 1$ ou $bc = a$, tous deux impliquant $b|a$, i.e. $a \leqslant b$. Par suite, pour tout anneau de Boole A, l'application $e \mapsto \mathrm{D}(e)$ est un isomorphisme entre le treillis correspondant à A et le treillis des parties ouvertes et fermées de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, d'où un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{F} \circ \mathrm{Spec} \simeq 1_{\mathbf{Boole}}$.

---

[2] Cette assertion fait l'objet de l'exercice 6 de la deuxième fiche de t.d.

Pour établir que le foncteur $\mathrm{Spec} \circ \mathrm{F}$ est isomorphe au foncteur identité de la catégorie des espaces topologiques compacts totalement discontinus, il suffit d'observer qu'un tel espace topologique E se reconstruit aisément à partir du treillis T de ses parties ouvertes et fermées : les points de E sont en effet en bijection avec les *ultrafiltres* de T, c'est-à-dire les sous-ensembles non vides $\mathfrak{u}$ de T satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tous $x \in \mathfrak{u}$ et tout $y \in \mathrm{T}$, $x \leqslant y \Rightarrow y \in \mathfrak{u}$;

(ii) pour tous $x, y \in \mathfrak{u}$, $\inf(x, y) \in \mathfrak{u}$;

(iii) pour tout $x \in \mathrm{T}$, $x \in \mathfrak{u}$ ou $x^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{u}$.

À tout point *e* de E correspond l'ultrafiltre de ses voisinages ouverts et fermés, deux points distincts définissant des ultrafiltres distincts puisque l'espace toplogique E est séparé et totalement discontinu ; la compacité de E garantit que tout ultrafiltre est convergent, i.e. provient d'un point de E. □

Référence

[1] R. CORI & J. LASCAR, *Logique mathématique*, 2 vol., Masson 1993.