6. Théorie de la dimension

(6.1) Une *chaîne* dans un ensemble ordonné I est une suite finie strictement croissante $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ d'éléments de I ; le nombre entier n est la *longueur* de cette chaîne.

Définition 6.1 — *(i) La* dimension de Krull *d'un espace topologique* X *est la borne supérieure des longueurs de chaînes de fermés irréductibles de* X *; on la note* $\dim(\mathrm{X})$.

(ii) La dimension de Krull *d'un anneau* A *est la dimension de Krull de son spectre premier ; on la note* $\dim(\mathrm{A})$.

De manière équivalente, la dimension de Krull d'un anneau A est la borne supérieure des longueurs des chaînes

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

d'idéaux premiers de A.

Remarques. 1) Si aucune confusion n'est à craindre avec une autre notion de dimension pour les espaces topologiques, ont parle plus simplement de la *dimension* d'un anneau ou de son spectre.

2) Tout fermé irréductible d'un espace topologique X étant contenu dans une composante irréductible, la dimension de X est la borne supérieure des dimensions de ses composantes irréductibles ; c'est de manière équivalente la borne supérieure des dimensions des anneaux $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *minimal* de A.

3) Noter que l'on a $\dim(0) = \dim(\varnothing) = -\infty$.

Exemples. On a $\dim(\mathbb{Z}) = 1$ et, pour tout corps k,

$$\dim(k) = 0, \ \ \dim(k[\mathrm{T}]) = 1, \ \ \dim(k[\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]) = 2.$$

Ces résultats découlent directement de la description explicite du spectre de ces anneaux (cf. t.d.2, exercice 9 pour $k[\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$). Plus généralement, la minoration

$$\dim(k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]) \geqslant n$$

s'obtient en considérant la suite d'idéaux premiers $(0) \subset (\mathrm{T}_1) \subset (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) \subset \ldots \subset (\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n)$; comme on va la démontrer, cette inégalité est en fait une égalité.

Proposition 6.2 — *Quel que soit l'anneau* A, *on a*

$$\dim(\mathrm{A}) + 1 \leqslant \dim(\mathrm{A}[\mathrm{X}]) \leqslant 2\dim(\mathrm{A}) + 1.$$

Démonstration. La première inégalité s'obtient simplement en observant que, pour toute chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premiers de A,

$$\mathfrak{p}_0\mathrm{A}[\mathrm{X}] \subsetneq \mathfrak{p}_1\mathrm{A}[\mathrm{X}] \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n\mathrm{A}[\mathrm{X}] \subsetneq \mathfrak{p}_n\mathrm{A}[\mathrm{X}] + (\mathrm{X})$$

est une chaîne d'idéaux premiers de A[X]. Pour établir la seconde inégalité, désignons par π l'application canonique de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\mathrm{X}])$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Comme les fibres de π sont toutes de dimension 1, une chaîne $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de A[T] donne naissance à une suite $\pi(\mathfrak{q}_0) \subset \pi(\mathfrak{q}_1) \subset \ldots \subset \pi(\mathfrak{q}_n)$ d'idéaux premiers de A dans laquelle il ne peut y avoir deux égalités consécutives ; on en déduit que cette suite contient une chaîne de longueur supérieure ou égale à $[n/2]$, donc $\dim(A) \geqslant [(\dim(A[X])+1)/2]$ et finalement $\dim(A[X]) \leqslant 2\dim(A)+1$. $\square$

Remarque. Il existe des anneaux A tels que $\dim(A[X]) > \dim(A)+1$; on démontrera toutefois que l'égalité $\dim(A[X]) = \dim(A)+1$ est vérifiée lorsque l'anneau A est noethérien.

(6.2) Rappelons d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ est dit *entier* si tout élément de B est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\varphi(A)$. Si φ est entier et injectif, on a démontré

- que l'application ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est *surjective* (3, Proposition 11 et 4, Lemme 4) ;
- qu'un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B est maximal si et seulement si $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est un idéal maximal de A (4, Lemme 3).

***Théorème 6.3 (Cohen-Seidenberg)** — Soit $\varphi : A \hookrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux entier et injectif.*

(i) Soient $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ deux idéaux premiers de A. Étant donné un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B tel que ${}^a\varphi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}'$ de B tel que ${}^a\varphi(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$.

(ii) Si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ sont deux idéaux premiers de B tels que ${}^a\varphi(\mathfrak{q}) = {}^a\varphi(\mathfrak{q}')$, alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Démonstration. (i) L'homomorphisme $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{q}$ induit par φ étant entier et injectif, l'application associée $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{q}) \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ est surjective et il existe donc un idéal premier $\mathfrak{q}'$ de B tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ et ${}^a\varphi(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$.

(ii) Posons $\mathfrak{p} = {}^a\varphi(\mathfrak{q}) = {}^a\varphi(\mathfrak{q}')$. L'homomorphisme $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ induit par φ est entier et l'idéal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ est maximal ; il en découle que les idéaux $\mathfrak{q}B_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}'B_\mathfrak{p}$ sont maximaux, donc égaux puisque $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, et finalement $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. $\square$

***Corollaire 6.4** — Soit $\varphi : A \hookrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux entier et injectif. Alors*

$$\dim(A) = \dim(B).$$

Démonstration. Étant donnée une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premiers de A, l'application itérée de l'assertion (i) du théorème précédent permet de construire une suite croissante $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de B telle que ${}^a\varphi(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$ pour tout i ; toutes les inclusions sont strictes, donc cette suite est une chaîne de longueur n. On établit ainsi l'inégalité

$$\dim(B) \geqslant \dim(A).$$

Réciproquement, pour toute chaîne $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de B, la suite $\varphi(\mathfrak{q}_0) \subset \varphi(\mathfrak{q}_1) \subset \ldots \subset \varphi(\mathfrak{q}_n)$ est une chaîne d'idéaux premiers de A en vertu de l'assertion (ii) du théorème précédent. On établit ainsi l'inégalité

$$\dim(B) \leqslant \dim(A).$$

$\square$

Exemple. Pour toute extension finie K de $\mathbb{Q}$, la fermeture intégrale $\mathcal{O}_K$ de $\mathbb{Z}$ dans K est un anneau de dimension 1.

Interlude : degré de transcendance d'une extension de corps — Étant donnée une extension de corps K/k, une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de K est dite *algébriquement indépendante* sur k si l'homomorphisme canonique de k-algèbres $k[(X_i)_{i\in I}] \to K,\ X_i \mapsto x_i$ est injectif. En utilisant le lemme de Zorn, on démontre l'existence d'une *base de transcendance*, c'est-à-dire d'une famille algébriquement indépendante $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'éléments de K telle que tout élément de K soit algébrique sur le sous-corps $k((x_i)_{i\in\mathrm{I}})$ de K.

Lemme 6.5 — *Soit* K/k *une extension de corps. Deux bases de transcendance ont le même cardinal.*

Démonstration. Pour simplifier, nous nous bornons à démontrer ce résultat sous l'hypothèse additionnelle qu'il existe une base de transcendance de cardinal *fini n* et nous raisonnons par induction sur ce cardinal.

Le cas $n = 0$ est clair : tout élément de K est algébrique sur k et chaque base de transcendance est donc vide.

Supposons $n \geq 1$ et considérons deux bases de transcendance $(x_1,\dots,x_n)$ et $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Par hypothèse, x_1 est algébrique sur le corps $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}})$ et il existe un sous-ensemble fini J de I tel que x_1 soit algébrique sur $k((t_i)_{i\in\mathrm{J}})$; on suppose J minimal. Comme x_1 est transcendant sur k, J est non vide. Soit $a \in \mathrm{J}$ et soit $f \in k[(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{J}},\mathrm{X}]$ un polynôme non nul tel que $f((t_i),x_1) = 0$; par minimalité de J, on a $\deg_{\mathrm{T}_a}(f) \geqslant 1$ et $f((t_i)_{i\in\mathrm{J}-\{a\}},\mathrm{T}_a,x_1) \neq 0$, d'où l'on déduit que t_a est algébrique sur le sous-corps de K engendré par x_1 et les t_i, $i \in \mathrm{I}-\{a\}$. La famille $(t_i)_{i\in\mathrm{I}-\{a\}} \cup \{x_1\}$ est algébriquement indépendante sur k : sinon, x_1 serait algébrique sur $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}-\{a\}})$ et on en déduirait que t_a l'est également, ce qui est contraire à notre hypothèse. Cette famille est également maximale pour cette propriété : en effet, quel que soit l'élément y de K, y est algébrique sur $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}})$, donc sur $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}},x_1)$ puis sur $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}-\{a\}},x_1)$.

Nous obtenons ainsi deux bases de transcendance $(x_2,\dots,x_n)$ et $(t_i)_{i\in\mathrm{I}-\{a\}}$ pour l'extension $K/k(x_1)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $\mathrm{I}-\{a\}$ est fini et de cardinal $n-1$; I est donc fini et de cardinal n, ce qu'il fallait démontrer. □

Ce que l'on vient de dire permet d'introduire la définition suivante : le *degré de transcendance* d'une extension de corps est l'élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ défini comme le cardinal d'une base de transcendance finie s'il en existe, ∞ sinon ; on le note $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}/k)$.

Remarque — Étant données des extensions de corps K/k et K'/K,

$$\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}'/k) = \mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}'/\mathrm{K}) + \mathrm{degtr}(\mathrm{K}/k).$$

Cette égalité est évidente si $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}/k) = \infty$ ou $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}'/\mathrm{K}) = \infty$; sinon, on vérifie sans difficulté que pour toutes bases de transcendance $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de K/k et K'/K respectivement, $\mathscr{B}\cup\mathscr{B}'$ est une base de transcendance de K'/k.

Théorème 6.6 — *Soit k un corps.*

(i) Pour tout entier $n \geqslant 0$*, l'anneau* $k[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]$ *est de dimension n.*

(ii) Pour toute k-algèbre A *de type fini et intègre,*

$$\dim(\mathrm{A}) = \mathrm{deg.tr}(\mathrm{Frac}(\mathrm{A})/k).$$

Démonstration. Observons tout d'abord que les assertions

(a_n) l'anneau $k[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n]$ est de dimension n ;

(b_n) si A est une k-algèbre de type fini telle que $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{Frac}(\mathrm{A})/k) = n$, alors $\dim(\mathrm{A}) = n$;

sont équivalentes pour tout entier $n \geq 0$. L'implication $(b_n) \Rightarrow (a_n)$ se déduit trivialement du fait que l'extension de corps $k(\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n)/k$ soit de degré de transcendance n. Considérons réciproquement une k-algèbre de type fini et intègre A telle que $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{Frac}(\mathrm{A})/k) = n$ et soit $\varphi : k[\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_m] \hookrightarrow \mathrm{A}$ un homomorphisme surjectif et entier (lemme de normalisation de Noether). La famille $(\varphi(\mathrm{T}_1),\dots,\varphi(\mathrm{T}_m))$ est une base de transcendance de $\mathrm{Frac}(\mathrm{A})/k$, donc $m=n$, puis

$$\dim(\mathrm{A})=\dim(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n])=n$$

en vertu du corollaire 6.4.

Nous allons maintenant démontrer l'assertion (i) en raisonnant par récurrence sur n. La chaîne d'idéaux premiers $(0)\subsetneq(\mathrm{X}_1)\subsetneq(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)\subsetneq\ldots\subsetneq(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ de $k[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ impliquant la minoration $\dim(k[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n])\geqslant n$, il suffit d'établir l'inégalité inverse.

Il n'y a rien à démontrer si $n=0$. Soit donc $n\geqslant 1$ et considérons une chaîne $(0)\subsetneq\mathfrak{p}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathfrak{p}_r$ dans $k[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]$ avec $r\geqslant 1$. L'idéal $\mathfrak{p}_1$ étant non nul, il contient un polynôme f non nul qui fournit une relation de dépendance algébrique non triviale entre les images de $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ dans la k-algèbre de type fini intègre $\mathrm{A}=k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]/\mathfrak{p}_1$; plus précisément, si l'on suppose par exemple $\deg_{\mathrm{X}_n}(f)\geqslant 1$, alors $\mathrm{K}=\mathrm{Frac}(\mathrm{A})$ est une extension algébrique du sous-corps engendré par les images de $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-1}$ et donc $\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}/k)\leqslant n-1$. On déduit alors de l'hypothèse de récurrence la majoration

$$r-1\leq\dim(\mathrm{A})=\mathrm{deg.tr}(\mathrm{K}/k)\leqslant n-1,$$

d'où

$$\dim(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n])\leqslant n.$$

□

Corollaire 6.7 — *Toute algèbre de type fini sur un corps est de dimension finie.*

Démonstration. Soit A une algèbre de type fini sur un corps et soit $\mathscr{M}$ l'ensemble de ses idéaux premiers minimaux. En vertu du théorème précédent, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est de dimension finie pour tout idéal premier de A et donc

$$\dim(\mathrm{A})=\sup_{\mathfrak{p}\in\mathscr{M}}\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{p})<\infty$$

puisque l'ensemble $\mathscr{M}$ est fini par noethérianité de A. □

(6.3) Soit X un espace topologique et soit $\mathrm{Y}\subset\mathrm{X}$ un fermé irréductible. La *codimension* de Y dans X est la borne supérieure des longueurs des chaînes de fermés irréductibles de X contenant Y. Notation : $\mathrm{codim}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$.

Si A est un anneau la *hauteur* $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est par définition la codimension de $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$; c'est de manière équivalente la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$, soit encore la dimension de l'anneau local $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$:

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=\dim(\mathrm{A}_\mathfrak{p}).$$

Proposition 6.8 — *Soit* X *un espace topologique. Pour tout fermé irréductible* Y *de* X,

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Y},\mathrm{X})+\dim(\mathrm{Y})\leqslant\dim(\mathrm{X}).$$

Démonstration. C'est évident. □

Lemme 6.9 — *Soit k un corps et* $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n])$. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour tout fermé irréductible* Y *de* X *:*

(i) $\mathrm{codim}(\mathrm{Y},\mathrm{X})=1$ *;*

(ii) $\mathrm{Y}=\mathrm{V}(f)$ *avec* $f\in k[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ *irréductible.*

Démonstration. La condition $\operatorname{codim}(Y,X) = 1$ revient à dire que Y est de la forme $V(\mathfrak{p})$ avec $\mathfrak{p}$ non nul et minimal pour cette propriété. L'anneau $k[T_1,\ldots,T_n]$ étant factoriel, les idéaux premiers non nuls minimaux sont précisément les idéaux principaux engendrés par un polynôme irréductible. □

Proposition 6.10 — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre de type fini intègre,* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *et* $Y \subset X$ *un fermé irréductible. On a*

$$\operatorname{codim}(Y,X) + \dim(Y) = \dim(X).$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur $\operatorname{codim}(Y,X)$, il suffit d'établir cette identité lorsque $\operatorname{codim}(Y,X) = 1$.

Considérons un morphisme entier et injectif $k[T_1,\ldots,T_n] \hookrightarrow A$ et soit $\pi : X \to X_0 = \operatorname{Spec}(k[T_1,\ldots,T_n])$ l'application associée. L'image $\pi(Y)$ de Y est un fermé irréductible de X_0 et $\operatorname{codim}(\pi(Y),X_0) = \operatorname{codim}(Y,X) = 1$ en vertu du théorème de Cohen-Seidenberg. Vu le lemme précédent, $\pi(Y) = V(f)$ avec $f \in k[T_1,\ldots,T_n]$ irréductible.

Posant $B = [T_1,\ldots,T_n]/(f)$, on a

$$\dim(\pi(Y)) = \operatorname{deg.tr}(\operatorname{Frac}(B)/k) = n-1$$

et donc $\dim(Y) = \dim(\pi(Y)) = n-1$. □

(6.4) Nous allons maintenant relier la codimension d'un fermé irréductible au nombre d'équations le définissant. Ceci va nous permettre en particulier de démontrer que tout anneau local noethérien est de dimension finie.

Lemme 6.11 — *Soit* A *un anneau noethérien. Si* A *est de dimension* 0*, toute suite décroissante d'idéaux de* A *est stationnaire.*

Démonstration. Cf. travaux dirigés, feuille 4, exercices 3 et 5. □

Théorème 6.12 (Hauptidealsatz de Krull) — *Soit* A *un anneau noethérien intègre et soit f un élément non nul de* A*. Tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de* A *contenant f et minimal pour cette propriété est de hauteur* 1.

Démonstration. L'idéal $\mathfrak{p}$ est non nul puisqu'il contient f et il nous faut prouver que (0) est le seul idéal premier de A strictement contenu dans $\mathfrak{p}$. Quitte à remplacer A par $A_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer que A est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$; c'est ce que l'on fait. Par hypothèse, $\mathfrak{p}$ est l'unique idéal premier de A contenant f donc l'anneau A/fA est de dimension 0.

Considérons un idéal premier $\mathfrak{q}$ de A strictement contenu dans $\mathfrak{p}$. Par hypothèse, $\mathfrak{q}$ ne contient pas f. Soit $(\mathfrak{q}_n)$ la suite décroissante d'idéaux de A définie par

$$\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}} \cap A = \{a \in A \text{ ; il existe } s \in A - \mathfrak{q} \text{ tel que } sa \in \mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{q}}\}.$$

L'anneau A/Af étant noethérien et de dimension 0, la suite $(\mathfrak{q}_n A/Af)$ est stationnaire et il existe donc un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\mathfrak{q}_n + Af = \mathfrak{q}_{n+1} + Af.$$

Pour tout $x \in \mathfrak{q}_n$, il existe $a \in A$ tel que $x + af \in \mathfrak{q}_{n+1}$; on a $af \in \mathfrak{q}_n$, donc $a \in \mathfrak{q}_n$ puisque $f \in A - \mathfrak{q}$, et par suite

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_n &= \mathfrak{q}_{n+1} + f\mathfrak{q}_n \\ &= \mathfrak{q}_{n+1} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n. \end{aligned}$$

On a ainsi $\mathfrak{q}_n/\mathfrak{q}_{n+1} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n/\mathfrak{q}_{n+1}$, donc $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1}$ par application du lemme de Nakayama.

Comme $\mathfrak{q}_m \mathrm{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^m \mathrm{A}_\mathfrak{q}$ pour tout m,

$$\mathfrak{q}^n \mathrm{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1}\mathrm{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{q}^n \mathrm{A}_\mathfrak{q}$$

et donc $\mathfrak{q}^n \mathrm{A}_\mathfrak{q} = 0$ par une nouvelle application du lemme de Nakayama. L'idéal $\mathfrak{q}$ étant premier, $\mathfrak{q}\mathrm{A}_\mathfrak{q} = 0$ et finalement $\mathfrak{q} = 0$. □

Théorème 6.13 — *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *Quels que soient* $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$,

$$\dim(\mathrm{A}) \leqslant \dim(\mathrm{A}/(f_1, \dots, f_r)) + r.$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur r, on se ramène à prouver

$$\dim(\mathrm{A}) \leqslant \dim(\mathrm{A}/\mathrm{A}f) + 1$$

pour tout $f \in \mathfrak{m}$.

Étant donnée une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premiers de A telle que $f \in \mathfrak{p}_n$, nous allons construire une nouvelle chaîne $\mathfrak{p}'_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{m}$ telle que $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0$ et $f \in \mathfrak{p}'_1$. On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons $n \geqslant 2$ et $f \notin \mathfrak{p}_{n-1}$. Soit $\mathfrak{p}'_{n-1}$ un idéal premier contenant $\mathfrak{p}_{n-2} + \mathrm{A}f$ et minimal pour cette propriété ; comme $\mathfrak{p}_n$ est de hauteur au moins 2 dans l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{p}_{n-2}$, l'inclusion $\mathfrak{p}'_{n-1} \subset \mathfrak{p}_n$ est stricte en vertu du théorème précédent et on obtient donc une chaîne $\mathfrak{p}_{n-2} \subset \mathfrak{p}'_{n-1} \subset \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{m}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à la chaîne $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_{n-2} \subset \mathfrak{p}'_{n-1}$ fournit une chaîne $\mathfrak{p}'_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_{n-1}$ avec $\mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p}_0$, $f \in \mathfrak{p}'_1$ et il suffit de considérer la chaîne $\mathfrak{p}'_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_n$ obtenue par concaténation.

Appliquant ce que l'on vient de dire à toute chaîne de la forme $\mathfrak{p}_0 \subset \dots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$, nous en déduisons $\dim(\mathrm{A}/f\mathrm{A}) \geqslant n - 1$ et donc

$$\dim(\mathrm{A}) \leqslant \dim(\mathrm{A}/\mathrm{A}f) + 1.$$

Corollaire 6.14 — *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *et de corps résiduel* k. *La dimension de* A *est finie et*

$$\dim(\mathrm{A}) \leqslant \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Démonstration. Le A-module $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $k = \mathrm{A}/\mathfrak{m}$. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathfrak{m}$ relevant une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n) + \mathfrak{m}^2$ et donc $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ en vertu du lemme de Nakayama. Il reste alors à appliquer le théorème précédent. □

Remarque Un anneau noethérien non local peut être de dimension infinie ; M.NAGATA a exhibé un exemple.

Corollaire 6.15 — *Soient* k *un corps et* A *une* k*-algèbre intègre de type fini sur* k *de dimension* n. *On pose* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

(i) Étant donnés des éléments $f_1, \dots, f_r$ *de* A, *les composantes irréductibles du fermé* $\mathrm{V}(f_1, \dots, f_r)$ *de* X *sont de codimension inférieure ou égale à* r.

(ii) Étant donné un fermé irréductible Y *de* X *de codimension* r, *il existe des éléments* $f_1, \dots, f_r$ *de* A *tels que* Y *soit une composante irréductible du fermé* $\mathrm{V}(f_1, \dots, f_r)$.

Démonstration. (i) Soit Y une composante irréductible de $V(f_1,\ldots,f_r)$ et soit y un point fermé de Y n'appartenant à aucune autre composante irréductible de $V(f_1,\ldots,f_r)$. Le point y correspond à un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A contenant $\mathfrak{I}(Y)$ et, en vertu de la proposition 6.10,

$$\begin{aligned} \dim(A) &= \dim(A_{\mathfrak{m}}) \\ &\leqslant \dim(A_{\mathfrak{m}}/(f_1,\ldots,f_r)) + r. \end{aligned}$$

Comme

$$\dim(A_{\mathfrak{m}}/(f_1,\ldots,f_r)) = \dim(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{I}(Y)) = \dim(Y),$$

nous en déduisons

$$\operatorname{codim}(Y,X) = \dim(X) - \dim(Y) \leqslant n - r.$$

(ii) On raisonne par récurrence sur r, le cas $r=0$ étant évident. Supposons $r \geqslant 1$, donc $Y \neq X$, et soit f un élément non nul de $\mathfrak{I}(Y)$. D'après le théorème 6.12, toutes les composantes géométriques de $V(f)$ sont de codimension 1. Le fermé Y est contenu dans l'une de ces composantes irréductibles, disons Z, et

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}(Y,Z) &= \dim(Z) - \dim(Y) \\ &= \dim(X) - 1 - \dim(Y) \\ &= \operatorname{codim}(X,Y) - 1. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des éléments $f_1,\ldots,f_{r-1}$ dans A d'images $\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_{r-1}$ dans $A/\mathfrak{I}(Z)$ tels que Y soit une composante irréductible du fermé $V(\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_{r-1})$ de Z, lequel n'est autre que $V(f_1,\ldots,f_{r-1},f)$. □

Remarque. Soit k un corps et soit $\mathfrak{I}$ le noyau de l'homomorphisme

$$k[X,Y,Z] \to k[T],\ (X,Y,Z) \mapsto (T^3,T^4,T^5).$$

C'est un idéal premier et $V(\mathfrak{I})$ est un fermé irréductible de $\operatorname{Spec}(k[X,Y,Z])$ de codimension 2. On vérifie que $\mathfrak{I}$ est engendré par les trois polynômes $X^2Y - Z^2,\ XZ - Y^2$ et $YZ - X^3$ mais qu'il ne peut pas être engendré par deux polynômes seulement.