

MODIFICATIONS MATHÉMATIQUES

Au cours de la démonstration du théorème principal (section 3, p.4), vous manquez un point important : vous n'établissez pas que les hypothèses nécessaires pour appliquer les deux lemmes analytiques, à savoir que les fonctions symétriques g_1, \dots, g_r , définies et analytiques sur le complémentaire d'un fermé Zariski propre S de \mathbb{C}^n par construction, sont localement bornées en chaque point de S et à croissance polynomiale à l'infini.

Il y a là une légère subtilité, qu'il vous faut expliciter dans votre rédaction. Avec les notations du lemme 3, posons $X' = V(F) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ et soit g le morphisme $V(F) \rightarrow \mathbb{A}^n$ induit par la première projection. Le contenu du lemme 3 est le suivant : il existe des ouverts non vides $V \subset \mathbb{A}^n$ et $U \subset X'$ tels que

- (i) U soit isomorphe à l'ouvert $g^{-1}(V)$ de X' ;
- (ii) le morphisme $g : g^{-1}(V) \rightarrow V$ induit un revêtement topologique du point de vue de la topologie complexe.

Pour démontrer que l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ est connexe, il suffit d'établir qu'il en est ainsi pour l'ouvert non vide $U(\mathbb{C})$ en vertu du lemme 2. Par suite, la démonstration de la section 3 porte en fait sur la variété algébrique X' et on fait un usage décisif du fait que le polynôme unitaire F soit à coefficients dans $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$, et non simplement dans $\mathbb{C}[V]$: il est en effet indispensable que la base soit la variété \mathbb{A}^n , et non pas un ouvert Zariski quelconque de celle-ci, pour que les deux lemmes analytiques puissent s'appliquer !

Il vous faut reprendre la rédaction de la section 3 pour tenir compte de ces remarques. Par exemple : p.4, il ne suffit pas d'établir la majoration

$$|\theta \circ f_i^{-1}|(z) \leq 1 + \sum_{\ell=1}^n |a_\ell(z)| \leq C|z|^k$$

pour $z \in V(\mathbb{C})$... *D'une façon générale, la rédaction de la fin de la section 3 est trop lapidaire et il vous faut détailler davantage les différents arguments.*

REMARQUES GÉNÉRALES

1. Dans presque tout le texte (ainsi que dans les titre et résumé), remplacer *irreductible* par *irréductible*.

2. « Theorem » et non « Theoreme ».

3. Puisque vous ne mentionnez pas explicitement la construction des variétés algébriques en termes de spectres (maximaux), il est préférable d'employer systématiquement l'expression « Zariski topology » au lieu de « spectral topology ».

4. Il est souhaitable de ne jamais commencer une phrase par un symbole mathématique.

REMARQUES LOCALISÉES

1.0 Abstract — « usual topology on the affine space » est préférable.

1.1 Algebraic varieties and maps — (ligne 1) « An algebraic *variety* is a subset of \mathbb{C}^n of the form [...] » plutôt que « An algebraic variety of \mathbb{C}^n is subset [...] ». En outre, dans la définition de $V(I)$, utiliser une barre vecticale $|$ (\setminus mid) au lieu de \setminus (\setminus setminus).

(ligne 2) « The variety $\mathbb{C}^n = V(0)$ [...] » au lieu de « The variety \mathbb{C}^n [...] », pour mettre en évidence qu'il s'agit bien d'un cas particulier de la définition précédente.

(ligne 3) « The Zariski topology *on* \mathbb{C}^n » au lieu de « The Zariski topology *of* \mathbb{C}^n ». En outre, il serait préférable de reformuler cette phrase pour dire que les sous-variétés algébriques de \mathbb{C}^n satisfont aux axiomes des parties fermées d'une topologie sur \mathbb{C}^n , appelée topologie de Zariski. Préciser enfin que l'on munit chaque sous-variété algébrique de \mathbb{C}^n de la topologie induite.

(ligne 4) « [...] X is not *the* union of two proper closed *subsets* » plutôt que « [...] X is not union of two proper closed sets ».

(ligne 5) Seule l'implication (I premier \implies V(I) irréductible) est vraie. L'équivalence correcte est

$$(V(I) \text{ irréductible}) \implies (\sqrt{I} \text{ premier}).$$

Vous pouvez d'emblée remarquer qu'un idéal et sa racine définissent le même sous-ensemble de \mathbb{C}^n et dire que vous ne considérez que des idéaux égaux à leurs racines.

(lignes 6/7) « the *ring* of polynomial functions [...] » plutôt que « the *set* of polynomial functions[...] ».

(ligne 7) « *If* X is irreducible [...] » au lieu de « *Let* X is irreducible [...] ».

(ligne 8) « *quotient field* » au lieu de « field of fraction ».

(ligne 9) « [...] such *that* $f = (f_1, \dots, f_m)$ [...] » au lieu de « [...] such *as* $f = (f_1, \dots, f_m)$ [...] »

(ligne 10) Vous pouvez supprimer la mention des fonctions rationnelles (qui ne sont pas, au sens strict, des applications de X dans Y du fait des pôles) car vous ne les utilisez pas.

(lignes 11/12) Une phrase du style « Each regular map $f : X \rightarrow Y$ induces a ring homomorphism

$$f^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X], u \mapsto u \circ f$$

which makes $\mathbb{C}[X]$ a $\mathbb{C}[Y]$ -algebra » serait préférable.

(ligne 12) Il n'est pas vrai qu'un morphisme fini soit toujours surjectif. Contre-exemple : la projection canonique $A \rightarrow A/I$ fait de A/I une A -algèbre finie mais le morphisme de variétés correspondant n'est pas surjectif si $V(I)$ est un fermé strict. Il est par contre vrai qu'un morphisme fini f est surjectif si l'homomorphisme d'anneaux f^* est injectif. Écrivez donc plutôt « Any finite map f is surjective if f^* is injective, in which case we can consider the *field* extension $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(Y)$ ».

(lignes 13/14) Les idéaux ne vivent pas dans \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m . Par ailleurs, *onto* signifie « surjectif » et c'est *to* qu'il faut employer ici. Vous pouvez enfin remarquer que ce qui précède fournit en particulier une notion d'*isomorphisme* entre variétés algébriques – correspondant à un isomorphisme entre leurs anneaux de coordonnées –, ce qui permet de donner à la notion de variété algébrique un sens ne dépendant pas du choix d'un plongement dans un \mathbb{C}^n .

(lignes 15/16) Écrivez plutôt « By Noether *normalization lemma*, there exists a finite map $f : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ for some n (ref) ».

(ligne 17) « [...] *its* coordinate ring [...] *is* integrally closed. ».

(lignes 18 et 20) « normalization » semble plus couramment employé que « normalisation ».

1.2 Complex topology and Zariski topology — (lignes 1/2) Il faudrait mieux écrire quelque chose comme « Let X be an algebraic variety in \mathbb{C}^n . We denote by $X(\mathbb{C})$ the set X endowed with the topology induced by the usual topology on \mathbb{C}^n [...] ».

(ligne 7) Énoncez plutôt le théorème 3 en lieu et place du théorème 1 et expliquez tout de suite après comment se ramener au cas irréductible. Vous pouvez alors énoncer le théorème 1, qui est celui que vous allez démontrer par la suite.

2. Preliminary Lemmas

(ligne 4) « [...] and $Y \subsetneq X$ is a subvariety [...] »

(ligne 5) « Let $v : X^v \rightarrow X$ denote the normalisation »

(ligne 6) Votre justification de la densité de $X^v(\mathbb{C}) - Y^v(\mathbb{C})$ dans $X^v(\mathbb{C})$ est trop rapide ; expliquez pourquoi la non singularité de X^v permet de conclure.

(ligne 10) « containing y but no irreducible [...] ». Par ailleurs, votre construction garantit seulement que X' ne contient aucune des composantes irréductibles de Y passant par y (ce qui suffit pour la suite).

(ligne 11) Dites que l'hyperplan considéré est noté L .

(ligne 13) Autant dire que f est une forme linéaire...

(ligne 14) « Krull *Hauptidealsatz* » au lieu de « Haput-ideal-satz od Krull ». L'identité $V(I) = \text{Max}(A/I)$ n'a pas été mentionnée dans 1.1. Notez par ailleurs que ce n'est pas le spectre, mais seulement le spectre *maximal*, que l'on peut décrire en termes de points de \mathbb{C}^n .

(lignes 19/20) Écrivez plutôt « Thus every $y \in Y(\mathbb{C})$ belongs to the closure of $X(\mathbb{C}) - Y(\mathbb{C})$ and it follows that [...] ».

(ligne 21) « Let X be an irreducible variety [...] » ou « Assume X to be irreducible and let $Y \subsetneq X$ be [...] ». Vous pouvez remarquer qu'il s'agit d'un fait élémentaire de topologie générale : l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

(ligne 30) « [...] $L(\mathbb{C}) \cap V(\mathbb{C})$ is *pathwise-connected* ».

(ligne 31) « [...] a Zariski open *subset* $U \subset X$ [...] ».

(ligne 34) « and $f : U \rightarrow V$ is [...] ».

(ligne 35) « The continuous *map* $f : U(\mathbb{C}) \rightarrow V(\mathbb{C})$ is a *topological covering* » au lieu de « The continuous map $f : U(\mathbb{C}) \rightarrow V(\mathbb{C})$ is an unramified cover ».

(ligne 36) « By Noether normalisation, there exists [...] ».

(ligne 37) « [...] finite *field* extension [...] ».

(ligne 38) « [...] and for *any* $x \in \mathbb{C}[X]$ [...] ». Il serait par ailleurs préférable de réserver la notation x pour les points de X et d'utiliser une autre lettre (par exemple α).

(ligne 39) « If $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generate the \mathbb{C} -algebra $\mathbb{C}[X]$, then $a = a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_m}$ satisfies $a\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}[\mathbb{A}^n][\theta]$ ».

(ligne 40) « Let $d \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$ denote the discriminant of $F(T)$ and set $V = \mathbb{A}^n - V(ad)$, $U = X - V(ad) = f^{-1}(V)$. »

(ligne 42) Poursuivez la phrase précédente en mettant une virgule après $\mathbb{C}[V][\theta]$. Il s'agit en outre de U et non de $\mathbb{C}[U]$.

(ligne 43) « Denote *by* [...] ». Ni v_0 ni les notations d_{v_0} et F_{v_0} ne sont définies.

(ligne 44) « the implicit function theorem » et non « the implicit functions theorem ».

(ligne 45) « f is a homeomorphism [...] onto a neighborhood V_v of v [...] ».

(ligne 47) « that $f : U(\mathbb{C}) \rightarrow V(\mathbb{C})$ is a topological covering ».

3. Proof of the theorem — (ligne 1) Il n'est pas nécessaire de commencer par « Proof ». Écrivez par ailleurs « Corollary 1 » au lieu de « corollary (1) ».

(ligne 3) « Write $U(\mathbb{C}) = M_1 \sqcup M_2$ as the union of two disjoint non-empty closed subsets ». La phrase suivante est alors superflue.

(ligne 4) « Since f is a *topological covering*, $f(M_1)$ is open [...]. By *Lemma 2* [...] ».

(ligne 6) « Let $v \in V$ and denote by u_1, \dots, u_m its preimages under f . »

(ligne 7) « U_1, \dots, U_m be [...] ».

(ligne 8) « [...] contained in M_1 or in M_2 . We suppose that [...] » au lieu de « included in M_1 or M_2 , and we can suppose [...] ».

(ligne 9) idem

(ligne 10) « [...] f_1 is a *topological covering* ».

(lignes 11/12) « [...] the number of preimages of [...], and since $V(\mathbb{C})$ is connected, *this number* is constant ». Il est clair que ce nombre est r .

(ligne 14) Écrivez plutôt « Denote by $\theta_1, \dots, \theta_r$ [...] ».

(lignes 15/16) Écrivez plutôt « and define g_1, \dots, g_r to be the elementary symmetric functions in $\theta_1, \dots, \theta_r$, namely : ».

(ligne 18) « where $f_{(l)}$ is the restriction of f to U_l . »

(ligne 19) « All functions $\theta \circ f_{(l)}^{-1}$ are analytic on V_v [...] on $V(\mathbb{C})$. »

(ligne 24) « The number $\theta \circ f_i^{-1}(z)$ is a root [...] »

(ligne 25) « [...] extended to $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ [...] ». Par ailleurs, il y a là une erreur mathématique : les fonctions $\theta \circ f_i^{-1}$ sont de nature fondamentalement *locale* (l'expression d'une racine via le théorème des fonctions implicites) ne peuvent *pas* être définies sur tout $V(\mathbb{C})$; seules leurs fonctions symétriques de ces fonctions sont bien définies sur tout $V(\mathbb{C})$.

(ligne 29) Écrivez plutôt « It follows that $P_1(\theta) = 0$ or $P_2(\theta) = 0$, which contradicts $m = [\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(\mathbb{A}^n)]$. ».

4. Examples — (ligne 2) « [...] hence is connected by Lemma 2 ».

(ligne 9) Écrivez plutôt « Let X_1, \dots, X_p denote the irreducible components of X . Consider a decomposition $X(\mathbb{C}) = M_1 \sqcup M_2$ into two disjoint closed subsets. ».

(ligne 10) « Since $X_i(\mathbb{C})$ [...] »

(ligne 11) « either $X_i(\mathbb{C}) \subset M_1$ or $X_i(\mathbb{C}) \subset M_2$. »

(ligne 12) Écrivez plutôt « $X_1(\mathbb{C}), \dots, X_r(\mathbb{C}) \subset M_1$ and $X_{r+1}(\mathbb{C}), \dots, X_p(\mathbb{C}) \subset M_2$. Since all X_i are closed [...] »

(ligne 13) « $X_1 \cup \dots \cup X_r = X$ or $X_{r+1} \cup \dots \cup X_p = X$, which implies $M_1 = X(\mathbb{C})$ or $M_2 = X(\mathbb{C})$ ». Il manque par ailleurs un argument : les inclusions $X_1(\mathbb{C}), \dots, X_r(\mathbb{C}) \subset M_1$ et $X_{r+1}(\mathbb{C}), \dots, X_p(\mathbb{C}) \subset M_2$ impliquent que l'identité

$$X = (X_1 \cup \dots \cup X_r) \cup (X_{r+1} \cup \dots \cup X_p)$$

est une écriture de X comme réunion de fermés Zariski *disjoints*.

5. Analytic lemmas — (lignes 1/2) « [...] an algebraic subvariety of \mathbb{A}^n [...] on $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) - S(\mathbb{C})$ which [...] Then g can be extended to $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ »

(lignes 3/4) « [...] g can be extended to [...] in $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$. »

(ligne 11) « of roots of an algebraic equation, there exist [...] »

(ligne 12) Écrivez plutôt « $\forall (z', z_n) \in \mathbb{C}^2, (|z'| \leq \varepsilon \text{ and } |z_n| = r) \implies f(z', z_n) \neq 0$ » et passez à la ligne pour donner l'interprétation.

(lignes 13/15) Écrivez plutôt « We can therefore define a function G on $U = \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^2 \mid |z'| \leq \varepsilon, |z_n| < r\}$ by [...] »

(ligne 14) La différentielle intégrée est $\frac{g(z', w)}{w - z_n} dw$.

(ligne 16) « the function $(z', z_n) \mapsto \frac{g(z', w)}{w - z_n}$ is analytic on U [...] »

(ligne 17) « [...] we deduce that G is analytic on U . »

(ligne 18) Écrivez plutôt « analytic outside the points z_n such that $f(z', z_n) = 0$ [...] »

(ligne 20) L'égalité $G(z', z_n) = g(z', z_n)$ est valable pour tout couple (z', z_n) tel que $f(z', z_n) \neq 0$. Concluez explicitement.

(ligne 22) « [...] on $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ and [...] ». Précisez en outre que C est une constante réelle positive.

(ligne 24) « [...] of the Taylor series of f »

(ligne 28) « Consider the Taylor series of g »
