Université de Lyon - Université Lyon 1 **Semestre d'automne 2008**

Cours de Master 2 : *Groupes algébriques linéaires*

EXAMEN TERMINAL DU 12 JANVIER 2008

Durée : 3 heures

Les notes de cours sont autorisées.

Remarque importante : *Ce sujet est constitué de trois exercices. Les résultats de l'exercice II sont utilisés au cours de l'exercice III (questions 9 et 10) ; on pourra les admettre pour traiter ce dernier.*

Exercice I — Soit k un corps de caractéristique distincte de 2 et soit b une forme bilinéaire non dégénérée sur V. Un vecteur $v \in \mathrm{V}$ est dit *isotrope* si $b(v,v) = 0$.

1. Démontrer que le foncteur $\mathrm{O}(\mathrm{V},b) : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Gr}$ associant à toute k-algèbre R le sous-groupe $\mathrm{O}(\mathrm{V},b)(\mathrm{R})$ de $\mathrm{GL}(\mathrm{V} \otimes_k \mathrm{R})$ constitué des automorphismes R-linéaires de $\mathrm{V} \otimes_k \mathrm{R}$ préservant la forme bilinéaire symétrique $b_{\mathrm{R}} = b \otimes 1$ est un groupe algébrique.

2. Supposons que v soit un vecteur isotrope non nul. Démontrer qu'il existe un vecteur $v' \in \mathrm{V}$ tel que

$$b(v,v') = 1 \quad \text{et} \quad b(v',v') = 0$$

puis utiliser le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v,v')$ pour définir un isomorphisme entre $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et un sous-groupe de $\mathrm{O}(\mathrm{V},b)$ admettant v comme vecteur propre.

3. Supposons réciproquement que le groupe $\mathrm{O}(\mathrm{V},b)$ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Démontrer qu'il existe un vecteur isotrope non nul dans V.

Exercice II — Soit k un corps.

1. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie et soit u un automorphisme de V. On désigne par $\check{u}$ l'automorphisme du k-espace vectoriel dual $\mathrm{V}^\vee$ défini par $\check{u}(\varphi) = \varphi \circ u^{-1}$.

Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) u est une homothétie ;
(ii) $\check{u} \otimes u$ est l'identité de $\mathrm{V}^\vee \otimes_k \mathrm{V}$.

Soient G un k-groupe algébrique et H un sous-groupe de G. En vertu du théorème de Chevalley, il existe une représentation linéaire fidèle de dimension finie $\rho : \mathrm{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{\mathrm{V}}$ et une droite vectorielle $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ telles que $\mathrm{H} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W})$.

2. Démontrer qu'il existe un k-espace vectoriel V' de dimension finie et un homomorphisme $f : \mathrm{G}(k) \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}')$ satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) $\ker(f) = \mathrm{H}(k)$;
(ii) f est continu relativement aux topologies de Zariski ;
(iii) l'image par f d'un élément semi-simple (resp. unipotent) est semi-simple (resp. unipotente).

(*Indication : considérer un vecteur non nul de* W *et le plus petit sous-espace* $\mathrm{G}(k)$*-invariant de* V *le contenant*.)

Exercice III — Étant donné un groupe abstrait Γ, on définit inductivement une suite décroissante $(\mathrm{C}^m(\Gamma))_{m\geqslant 0}$ de sous-groupes distingués de Γ en posant

$$\mathrm{C}^0(\Gamma)=\Gamma,\quad \mathrm{C}^1(\Gamma)=\mathrm{D}(\Gamma)=(\Gamma,\Gamma)\quad\text{et}\quad \mathrm{C}^{m+1}(\Gamma)=(\Gamma,\mathrm{C}^m(\Gamma)),$$

où (A,B) désigne le sous-groupe de Γ engendré par les commutateurs $[x,y]$ avec $x\in\mathrm{A}$, $y\in\mathrm{B}$.

On dit que le groupe Γ est *nilpotent* s'il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{C}^n(\Gamma)=\{1\}$.

Soit k un corps algébriquement clos. Cet exercice a pour objet de caractériser les groupes nilpotents parmi les sous-groupes fermés et connexes de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$.

Notation : *si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$, on désigne par Γ_s (resp. Γ_u) l'ensemble des éléments semi-simples (resp. unipotents) de Γ.*

Remarque préliminaire : *on établit comme dans le cours (lemme 6.1.1) les inclusions*

$$\mathrm{C}^m(\Gamma)\subset\mathrm{C}^m(\overline{\Gamma})\subset\overline{\mathrm{C}^m(\Gamma)}$$

pour tout sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$ et tout nombre entier m. Ce fait peut être librement utilisé dans ce qui suit.

Première partie — On considère tout d'abord un sous-groupe fermé et connexe Γ de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$ tel que

(i) Γ_s et Γ_u soient deux sous-groupes de Γ ;

(ii) Γ_s soit abélien.

1. Démontrer que Γ est le produit direct de Γ_s et Γ_u. En déduire que Γ_s est *central*, c'est-à-dire contenu dans le centre de Γ.

2. Démontrer que les deux projections $\Gamma\to\Gamma_s$ et $\Gamma\to\Gamma_u$ sont des applications polynomiales en les coefficients matriciels et l'inverse du déterminant. En déduire que Γ_s et Γ_u sont connexes.

3. Démontrer que Γ est nilpotent.

Deuxième partie — On considère maintenant un sous-groupe *nilpotent* Γ de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$, que l'on suppose connexe mais non nécessairement fermé.

4 Démontrer que Γ_u est un sous-groupe distingué de Γ.

5. Si Γ est en outre fermé, démontrer que Γ_u est fermé.

6. Démontrer que tout sous-groupe H de Γ formé d'éléments semi-simples est abélien, et que H est central si c'est un sous-groupe distingué.

Troisième partie — On considère finalement un sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_\mathrm{N}(k)$, que l'on suppose fermé, connexe et *nilpotent*.

En raisonnant par récurrence sur le plus petit nombre entier n tel que $\mathrm{C}^n(\Gamma)=\{1\}$, nous allons démontrer que Γ_s est un sous-groupe de Γ et qu'il est central. Le cas $n=0$ étant trivial, on suppose $n\geqslant 1$ dans ce qui suit.

7. Démontrer que le centre Z de Γ est un sous-groupe fermé.

8. Vérifier que le sous-groupe $\mathrm{C}^{n-1}(\Gamma)$ est central ; en déduire que $\mathrm{C}^{n-1}(\Gamma/\mathrm{Z})$ est trivial.

9. En utilisant la question 2 de l'exercice I, démontrer que l'image de Γ_s dans Γ/Z est un sous-groupe central.

10. Posons $\Gamma' = \Gamma/\mathrm{Z}_u$. En utilisant de nouveau la question 2 de l'exercice I et en considérant la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Z}_s \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \Gamma/\mathrm{Z} \longrightarrow 1,$$

démontrer que l'image de Γ_s dans Γ' est un sous-groupe central.

11. Déduire de ce qui précède que Γ_s est contenu dans Z, puis qu'il s'agit d'un sous-groupe de Γ.