Corrigé de l'examen partiel du 4 avril 2013

Exercice 1

1. Soit $\mathrm{F}_0 \subset \mathbf{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension m. Pour tout endomorphisme orthogonal $g \in \mathrm{O}(n)$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $g(\mathrm{F}_0) \subset \mathrm{F}_0$;
(ii) $g(\mathrm{F}_0) = \mathrm{F}_0$;
(iii) $g(\mathrm{F}_0^\perp) = \mathrm{F}_0^\perp$.

L'assertion (i) implique (ii) car $\dim g(\mathrm{F}_0) = \dim \mathrm{F}_0$ puisque g est un automorphisme. Pour voir que (ii) implique (iii), considérons des vecteurs $x \in \mathrm{F}_0$ et $y \in \mathrm{F}_0^\perp$. Comme $g(\mathrm{F}_0) = \mathrm{F}_0$, le vecteur $g^{-1}(x)$ appartient encore à F_0, donc

$$(g(y)|x) = \big(g(y)|g(g^{-1}(x))\big) = \big(y|g^{-1}(x)\big) = 0$$

par orthogonalité de g et ainsi $g(y) \in \mathrm{F}_0^\perp$; ceci démontre l'inclusion $g(\mathrm{F}_0^\perp) \subset \mathrm{F}_0^\perp$, et la conclusion découle comme précédemment de l'égalité des dimensions. Enfin, comme $\mathrm{F}_0 = (\mathrm{F}_0^\perp)^\perp$, l'argument précédent appliqué à $\mathrm{F}_0^\perp$ au lieu de F_0 prouve que (iii) implique (i).

L'équivalence des assertions (ii) et (iii) se traduit par l'égalité :

$$\mathrm{O}_0(n) = \mathrm{O}_0(n)^*.$$

2. Vu l'égalité des sous-groupes $\mathrm{O}_0(n)$ et $\mathrm{O}_0(n)^*$, l'application considérée dans l'énoncé est l'identité de l'espace homogène $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n)$. Il s'agit évidemment d'une application continue.

3. Le groupe $\mathrm{O}(n)$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ de dimension m (ceci découle simplement du théorème de la base incomplète et du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). L'application continue

$$\mathrm{O}(n) \to \mathrm{Gr}_{m,n}, \quad g \mapsto g(\mathrm{F}_0)$$

induit donc une bijection continue $p_0 : \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n) \to \mathrm{Gr}_{m,n}$. Le groupe topologique $\mathrm{O}(n)$ étant compact et l'espace topologique $\mathrm{Gr}_{m,n}$ étant séparé, le théorème d'homéomorphisme garantit que p_0 est un homéomorphisme.

On justifie exactement de la même façon que l'application continue

$$\mathrm{O}(n) \to \mathrm{Gr}_{n-m,n}, \quad g \mapsto g(\mathrm{F}_0^\perp)$$

induit un homéomorphisme $p_0^\perp : \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n)^* \to \mathrm{Gr}_{n-m,n}$.

Notons π l'application $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{F}^\perp$ de $\mathrm{Gr}_{m,n}$ dans $\mathrm{Gr}_{n-m,n}$. En vertu de l'identité

$$(g(\mathrm{F}_0))^\perp = g(\mathrm{F}_0^\perp),$$

le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n) \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_0"'] & \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}_0(n)^* \arrow[d, "p_0^\perp"] \\
\mathrm{Gr}_{m,n} \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{Gr}_{n-m,n}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit l'égalité

$$\pi = p_0^\perp \circ p_0^{-1},$$

qui montre que π est un homéomorphisme.

Exercice 2

– Commençons par observer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe trois polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]$ homogènes de degré 1 tels que $\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{XZ} = \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2 - \mathrm{R}^2$;

(b) les matrices symétriques

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$$

sont congruentes dans $\mathrm{M}_n(k)$.

Justification — Un polynôme homogène de degré 1 dans $k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}]$ est la même chose qu'une forme linéaire sur k^3, donc (a) équivaut à l'existence d'une base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ du dual $(k^3)^*$ de k^3 telle que

$$\forall (x, y, z) \in k^3, \quad x^2 + 2yz = \varphi_1(x, y, z)^2 - \varphi_2(x, y, z)^2 - \varphi_3(x, y, z)^2.$$

Considérons trois formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 sur k^2 et désignons par Q la matrice dont la i-ème ligne est constituée des coordonnées de φ_i dans la base canonique de $(k^3)^*$. Les trois formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 sont linéairement indépendantes si et seulement si Q est inversible. Par ailleurs, pour tout vecteur colonne $\mathrm{V} \in k^3$,

$$\mathrm{QV} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathrm{V}) \\ \varphi_2(\mathrm{V}) \\ \varphi_3(\mathrm{V}) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\varphi_1(\mathrm{V})^2 - \varphi_2(\mathrm{V})^2 - \varphi_3^2(\mathrm{V}) = {}^t(\mathrm{QV})\mathrm{B}(\mathrm{QV}).$$

Ainsi, l'assertion (a) équivaut encore à l'existence d'une matrice inversible $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_3(k)$ telle que

$${}^t\mathrm{VAV} = {}^t(\mathrm{QV})\mathrm{B}(\mathrm{QV})$$

pour tout $\mathrm{V} \in k^3$, c'est-à-dire telle que

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{QBQ}.$$

Ceci est exactementl'assertion (b).

– Cette reformulation de l'assertion (a) permet d'appliquer le théorème décrivant les classes de congruences dans les trois cas particuliers $k = \mathbf{C}$, $k = \mathbf{R}$ et k fini de caractéristique distincte de 2.

(ii) Si $k = \mathbf{C}$, les matrices symétriques A et B sont congruentes car $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{B}) = 3$. L'assertion (a) est donc vraie.

(i) Si $k = \mathbf{R}$, la signature de la matrice symétrique A est $(2, 1)$ en vertu de l'identité

$$\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{YZ} = \mathrm{X}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Y} + \mathrm{Z})^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{Y} - \mathrm{Z})^2.$$

Puisque B est de signature $(1, 2)$, ces deux matrices ne sont pas congruentes et donc l'assertion (a) est fausse.

(iii) Supposons que k soit un corps fini de caractéristique distincte de 2. Puisque $\det(\mathrm{A}) = 1$ et $\det(\mathrm{B}) = -1$, les deux matrice A et B sont congruentes si et seulement si $-1 = 1 \bmod (k^\times)^2$, c'est-à-dire si et seulement si -1 est un carré dans k [1].

1. Il est facile d'expliciter cette condition. Soit p la caractéristique de k (c'est un nombre premier impair). Si $p \equiv 1 \pmod 4$, alors -1 est un carré dans $\mathbf{F}_p$; comme k contient $\mathbf{F}_p$, on en déduit que -1 est un carré dans k et donc que l'assertion (a) est vraie. Si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{F}_p$. Puisque $\mathbf{F}_p$ possède (dans une clôture algébrique fixée) une unique extension $\mathbf{F}_{p^d}$ de degré $d \geqslant 1$ donné (à savoir le corps de décomposition du polynôme $\mathrm{X}^{p^d} - \mathrm{X}$), on a nécessairement $\mathbf{F}_p[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + 1) = \mathbf{F}_{p^2}$; ainsi, -1 est un carré dans k si et seulement si $\mathbf{F}_{p^2} \subset k$.

Problème

Première partie

1. La transitivité découle directement du théorème de la base incomplète : étant donné deux vecteurs non nuls X_1 et X'_1 dans $\mathbf{K}^n$, on peut compléter les familles libres $\{\mathrm{X}_1\}$ et $\{\mathrm{X}'_1\}$ en des bases $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ et $(\mathrm{X}'_1,\ldots,\mathrm{X}'_n)$ de $\mathbf{K}^n$; l'unique endomorphisme P de $\mathbf{K}^n$ transformant la base $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ en la base $(\mathrm{X}'_1,\ldots,\mathrm{X}'_n)$ est inversible et tel que $\mathrm{PX}_1 = \mathrm{X}'_1$.

2. Notons $(\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. L'image de E_1 par $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est la première colonne de P, donc le stabilisateur de E_1 est le sous-groupe H de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

où $0_{n-1,1}$ est la matrice nulle dans $\mathrm{M}_{n-1,1}(\mathbf{K}), \mathrm{L} \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K})$.

En vertu des règles de calcul avec les matrices par blocs, l'application

$$p : \mathrm{H} \to \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K}), \quad \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{B} \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{B}$$

est un homomorphisme de groupes. Il est surjectif et l'application

$$\mathbf{K}^{n-1} \to \mathrm{H}, \quad \mathrm{Y} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathrm{Y} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

réalise un isomorphisme du groupe additif $\mathbf{K}^{n-1}$ sur le noyau de p.

L'application

$$s : \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K}) \to \mathrm{H}, \quad \mathrm{B} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

est un homomorphisme de groupes définissant une section de p, i.e. $s \circ p = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K})}$. Le groupe H est donc isomorphe au produit semi-direct

$$\mathbf{K}^{n-1} \rtimes_\varphi \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K}),$$

où φ est l'action de $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K})$ sur $\mathbf{K}^{n-1}$ définie comme suit via la section s :

$$\forall \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{K}), \quad \forall \mathrm{Y} \in \mathbf{K}^{n-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & {}^t\varphi(\mathrm{B})(\mathrm{Y}) \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix} = s(\mathrm{B}) \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathrm{Y} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{pmatrix} s(\mathrm{B})^{-1}.$$

Un calcul élémentaire conduit à la formule suivante :

$$\varphi(\mathrm{B})(\mathrm{Y}) = {}^t\mathrm{B}^{-1}\mathrm{Y}.$$

3. On démontre que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe pour tout $n \geqslant 1$ en raisonnant par récurrence sur n. Comme $\mathrm{GL}_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$ est connexe, ceci est vrai pour $n = 1$. Supposons que ce soit vrai pour $n - 1 \geqslant 1$ et reprenons les notations de la question précédente.

- Le sous-groupe H est un produit semi-direct topologique de $\mathbf{C}^{n-1}$ par $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{C})$, donc il est connexe car l'espace topologique sous-jacent à H est homéomorphe au produit cartésien des espaces connexes $\mathbf{C}^{n-1}$ et $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{C})$.
- Le sous-groupe H est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
- Le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est séparé, localement compact et dénombrable à l'infini, donc le théorème d'homéomorphisme garantit que la bijection $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})/\mathrm{H} \simeq \mathbf{C}^n - \{0\}$ induite par l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}^n - \{0\}$ est un homéomorphisme. Comme $\mathbf{C}^n - \{0\}$ est connexe, on en déduit qu'il en est de même de l'espace homogène $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})/\mathrm{H}$.

Il reste maintenant à appliquer un théorème du cours :

soit G *un groupe topologique* G *et soit* $\mathrm{H} \leqslant \mathrm{G}$ *un sous-groupe ; si* H *et* G/H *sont connexes, alors* G *est connexe.*

4. On démontre que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ est connexe pour tout $n \geqslant 1$ en raisonnant par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat puisque $\mathrm{GL}_1(\mathbf{R})_+ = \mathbf{R}_+^*$.

Si $n \geqslant 2$, le sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ opère transitivement sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$: en effet, dans l'argument donné à la question 1, en remplaçant au besoin X'_2 par $-\mathrm{X}'_2$, on peut toujours faire en sorte que les bases $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ et $(\mathrm{X}'_1, \ldots, \mathrm{X}'_n)$ définissent la même orientation, c'est-à-dire que la matrice P soit de déterminant strictement positif.

En reprenant les notations de la question 2, le stabilisateur H_+ de E_1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ est le sous-groupe

$$\mathrm{H}_+ = \mathrm{H} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{B} \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \mathrm{L} \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathbf{R}) \text{ et } \det \mathrm{B} > 0 \right\}$$

et l'on prouve comme précédemment que H_+ est isomorphe au produit semi-direct topologique $\mathbf{R}^{n-1} \rtimes_{\varphi_+} \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{R})_+$, où φ_+ est l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ sur $\mathbf{R}^{n-1}$ induite par φ.

Maintenant, les arguments donnés à la question 3 s'appliquent tels quels en remplaçant $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$.

5. Faisons agir $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ par translation à gauche sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Il y deux orbites, distinguées par le signe du déterminant :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_- = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) - \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+.$$

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$, la multiplication par A induit un homéomorphisme entre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$; on en déduit donc que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$ est connexe. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est la réunion disjointe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$, ces deux parties sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Deuxième partie

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'application continue $p_{\mathrm{A}} : \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{PAP}^{-1}$ induit un homéomorphisme

$$\overline{p}_{\mathrm{A}} : \; \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/\mathrm{Z}_{\mathrm{A}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathrm{A}} \; .$$

1. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ est connexe puisque image du groupe connexe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ par l'application continue p_{A}.

On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ dans tout ce qui suit.

2. Pour toute matrice A, désignons par $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}^+ \subset \mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ l'orbite de A sous le sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$. Quel que soit $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$, la décomposition

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ \sqcup \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ \cdot \mathrm{P}_0$$

se traduit par l'identité

$$\mathscr{O}_{\mathrm{A}} = \mathscr{O}_{\mathrm{A}}^+ \cup \mathscr{O}_{\mathrm{P}_0\mathrm{AP}_0^{-1}}^+.$$

En outre, la connexité du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ implique celle des $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$-orbites $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}^+$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{P}_0\mathrm{AP}_0^{-1}}^+$.

Si l'on peut choisir P_0 dans $\mathrm{Z}_{\mathrm{A}} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$, alors $\mathrm{P}_0\mathrm{AP}_0^{-1} = \mathrm{A}$ et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{A}} = \mathscr{O}_{\mathrm{A}}^+$. La $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$-orbite $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ est donc connexe si Z_{A} contient une matrice de déterminant < 0.

3. Si n est impair, alors Z_{A} contient la matrice $-\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$. D'après la question précédente, ceci implique la connexité de $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$.

4. Si $\mathrm{Z}_{\mathrm{A}} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, l'application identique de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ induit une application continue i : $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{Z}_{\mathrm{A}} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$. En munissant $\{\pm 1\}$ de la topologie discrète, le signe du déterminant fournit par ailleurs une application continue et surjective $\delta : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+ \to \{\pm 1\}$. Par composition, on obtient une application continue et surjective

$$\delta \circ i \circ \overline{p}_{\mathrm{A}}^{-1} : \mathscr{O}_{\mathrm{A}} \to \{\pm 1\}$$

et ceci prouve que $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ n'est pas connexe.

5. Soit $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_-$. L'identité

$$\mathscr{O}_{\mathrm{A}} = \mathscr{O}_{\mathrm{A}}^+ \cup \mathscr{O}_{\mathrm{P}_0\mathrm{AP}_0^{-1}}^+$$

montre que $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ est la réunion de deux $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$-orbites, toutes deux connexes ; $\mathscr{O}_{\mathrm{A}}$ a donc *au plus* deux composantes connexes.

- Si $\mathrm{Z_A} \not\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, alors $\mathcal{O}_\mathrm{A} = \mathcal{O}_\mathrm{A}^+$ est connexe (question 2).
- Si $\mathrm{Z_A} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, alors $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ n'est pas connexe (question 4). Dans ce cas, $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ possède donc exactement deux composantes connexes.

Troisième partie

1. Soit R (resp. C) l'ensemble des valeurs propres réelles (resp. complexes non réelles) de M. En désignant par m_λ la multiplicité de $\lambda \in \mathrm{R} \cup \mathrm{C}$ en tant que racine du polynôme caractéristique $\chi_\mathrm{M} = \det(\mathrm{M} - \mathrm{XI}_n)$, on a :

$$\det \mathrm{M} = \prod_{\lambda \in \mathrm{R}\cup\mathrm{C}} \lambda^{m_\lambda}.$$

Le sous-ensemble C de $\mathbf{C}$ est stable par conjugaison et $m_{\overline{\lambda}} = m_\lambda$, donc $\prod_{\lambda\in\mathrm{C}} \lambda^{m_\lambda} \in \mathbf{R}_+^*$. On en déduit que det M est du signe de $\prod_{\lambda\in\mathrm{R}} \lambda^{m_\lambda}$, et donc que M possède une valeur propre réelle strictement négative de multiplicité impaire si (et seulement si) $\det \mathrm{M} < 0$.

2. Supposons que $\mathrm{Z_A}$ contienne une matrice M de déterminant strictement négatif. D'après la question précédente, il existe un réel $\alpha < 0$, un entier naturel impair m et un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tels que

$$\chi_\mathrm{M} = (\mathrm{X} - \alpha)^m \mathrm{P}.$$

Par application du lemme des noyaux, on en déduit une décomposition en somme directe

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{F}''$$

avec $\mathrm{F}' = \mathrm{Ker}\ (\mathrm{M} - \alpha \mathrm{I}_n)^m$ et $\mathrm{F}'' = \mathrm{Ker}\ \mathrm{P}(\mathrm{M})$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont stabilisés par A et F' est de dimension m impaire.

Réciproquement, supposons que l'on ait une décomposition

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}'$$

telle que F, F' soient des sous-espaces vectoriels stabilisés par A et $2 \nmid \dim \mathrm{F}$. L'automorphisme M_0 de $\mathbf{R}^n$ tel que

$$\mathrm{M}_0\mathrm{X} = \begin{cases} -\mathrm{X} & \text{si } \mathrm{X} \in \mathrm{F} \\ \mathrm{X} & \text{si } \mathrm{M} \in \mathrm{F}' \end{cases}$$

est un élément de $\mathrm{Z_A}$ de déterminant $(-1)^m = -1$.

3. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on désigne par J_p la matrice de Jordan standard dans $\mathrm{M}_p(\mathbf{R})$.

(i) La restriction de A à F' est un endomorphisme nilpotent A' de F' de diagramme de Young Y'. Dans une base convenable de F', la matrice de A' est $\mathrm{diag}(\mathrm{J}_{p'_1}, \ldots, \mathrm{J}_{p'_r})$, où $p'_1, \ldots, p'_r$ sont les longueurs des r colonnes de Y'. De même, dans une base convenable de F'', la restriction A'' de A à F'' a pour matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{J}_{p''_1}, \ldots, \mathrm{J}_{p''_s})$, où $p''_1, \ldots, p''_s$ sont les longueurs des s colonnes de Y''.

En juxtaposant ces bases de F' et F'', on obtient une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de A est $\mathrm{diag}(\mathrm{J}_{p'_1}, \ldots, \mathrm{J}_{p'_r}, \mathrm{J}_{p''_1}, \ldots, \mathrm{J}_{p''_s})$. Le tableau de Young de A est donc obtenu en juxtaposant les tableaux deux tableaux de Young Y' et Y'', puis en réordonnant les colonnes afin que leurs longueurs soient décroissantes.

(ii) Supposons que Y possède une colonne c_0 de longueur impaire. Le choix d'une base de Jordan fournit une décomposition en somme directe

$$\mathbf{R}^n = \bigoplus_c \mathrm{F}_c,$$

où c parcourt l'ensemble des colonnes de Y et F_c est un sous-espace A-stable de dimension la longueur de c. En appliquant la question 2 avec $\mathrm{F}' = \mathrm{F}_{c_0}$ et $\mathrm{F}'' = \bigoplus_{c \neq c_0} \mathrm{F}_c$, on en déduit que $\mathrm{Z_A}$ contient une matrice de déterminant < 0, puis que $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ est connexe (deuxième partie, question 5).

Réciproquement, si $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ est connexe, alors $\mathrm{Z_A}$ contient une matrice de déterminant < 0 et il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{F}''$ avec $\mathrm{F}', \mathrm{F}''$ stabilisés par A et $\dim \mathrm{F}'$ impaire. Soit Y' et Y'' les tableaux de Young des restrictions de A à F' et F''. On a

$$\dim \mathrm{F}' = \sum_c \mathrm{long}(c)$$

où c parcourt l'ensemble des colonnes de Y' ; puisque $\dim \mathrm{F}'$ est impaire, cette identité implique l'existence d'une colonne de longueur impaire dans Y'. Finalement, comme le tableau de Young Y de A est obtenu par juxtaposition de Y' et Y'' et permutation des colonnes (point (i)), Y contient une colonne de longueur impaire.