Université Claude Bernard Lyon 1

Master M1 Recherche - Groupes classiques et géométrie
Corrigé de l'examen du 28 mai 2013

Exercice 1

1. (a) Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ est de cardinal

$$|\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1).$$

En vertu de la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbf{K}) \xrightarrow{\det} \mathbf{K}^\times \longrightarrow 1 ,$$

le cardinal de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{K})$ est égal à :

$$|\mathrm{SL}(n, \mathbf{K})| = \frac{|\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})|}{|\mathbf{K}^\times|} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1).$$

Le centre du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbf{K})$ est formé des homothéties de rapport λ tel que $\lambda^n = 1$; il est donc isomorphe au groupe $\mu_n(\mathbf{K})$ des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{K}$. Le groupe $\mathrm{PSL}(n, \mathbf{K}) = \mathrm{SL}(n, \mathbf{K})/\mu_n(\mathbf{K})$ est par suite de cardinal

$$|\mathrm{PSL}(n, \mathbf{K})| = \frac{|\mathrm{SL}(n, \mathbf{K})|}{|\mu_q(\mathbf{K})|} = \frac{1}{u_n(q)} \; q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1).$$

(b) Tout $x \in \mathbf{F}_4$ est tel que $x^4 = x$. On a donc

$$\mathbf{F}_4^\times = \{x \in \mathbf{F}_4^\times \mid x^3 = 1\} = \mu_3(\mathbf{F}_4) \quad \text{et} \quad u_3(4) = |\mathbf{F}_4^\times| = 3.$$

Si le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique 2, alors

$$\forall x \in \mathbf{K}, \forall m \in \mathbf{N}, \quad x^{2^m} = 1 \Longleftrightarrow x^{2^m} - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^{2^m} = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0$$

et donc $\mu_{2^m}(\mathbf{K}) = \{1\}$; en particulier, $u_{2^m}(2) = 1$.

(c) En vertu des points (a) et (b), on a

$$|\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)| = 2^6(2^2 - 1)(2^3 - 1)(2^4 - 1) = 2^6 \; 3^2 \; 5 \; 7$$

et

$$|\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)| = \frac{1}{3} \; 4^3(4^2 - 1)(4^3 - 1) = 2^6 \; 3^2 \; 5 \; 7.$$

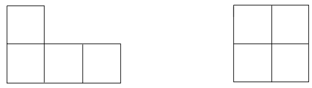
Les groupes $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ sont donc de même ordre.

2. Si le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique 2, alors l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^2$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$. En particulier, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{K})$,

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n \Longleftrightarrow \mathrm{A}^2 - \mathrm{I}_n = 0 \Longleftrightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)^2 = 0.$$

On en déduit qu'une matrice A est d'ordre 2 – c'est-à-dire $\mathrm{A} \neq \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$ – si et seulement si la matrice $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ est non nulle et telle que $\mathrm{N}^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si N est nilpotente d'indice 2.

Remarquons en outre que deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ sont conjuguées (par un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$) si et seulement si c'est le cas des matrices $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B} - \mathrm{I}_n$.



3. Les trois groupes $\mathrm{GL}(4, \mathbf{F}_2)$, $\mathrm{SL}(4, \mathbf{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)$ sont égaux car $\mathbf{F}_2^\times = \mu_4(\mathbf{F}_2) = \{1\}$.

Les classes de conjugaison de matrices nilpotentes d'indice 2 dans $\mathrm{M}(4, \mathbf{F}_2)$ sont décrites pas les diagrammes de Young à 4 cases et 2 lignes. Il y a deux diagrammes possibles :
correspondant aux classes de conjugaison des matrices de Jordan

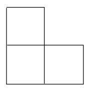
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 2, les éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{GL}(4, \mathbf{F}_2)$ se répartissent en deux classes de conjugaison, représentées par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Considérons un élément $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ d'ordre 2.

(i) Il existe un unique diagramme de Young à trois cases et deux lignes :



donc une unique classe de conjugaison de matrices nilpotentes d'indice 2 dans $\mathrm{M}(3, \mathbf{F}_4)$. D'après la question 2, on en déduit que A est conjugué, *par un élément de* $\mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_4)$, à la matrice

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}(3, \mathbf{F}_4)$ tel que

$$\mathrm{PAP}^{-1} = \mathrm{A}_0.$$

La matrice A_0 étant diagonale par blocs, elle commute aux matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(1, 1, \alpha)$, quel que soit $\alpha \in \mathbf{K}^\times$. Par suite, en posant

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, 1, (\det \mathrm{P})^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{DP},$$

on obtient les identités

$$\mathrm{QAQ}^{-1} = \mathrm{DA}_0\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{A}_0 \qquad \text{et} \qquad \det \mathrm{Q} = 1.$$

Ainsi, tous les éléments d'ordre 2 dans $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ sont conjugués *dans ce groupe.*

5. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ dont l'image $\overline{\mathrm{A}}$ dans $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ est d'ordre 2. Il revient au même de dire que l'on a

$$\mathrm{A} \notin \mathbf{F}_4^\times \cdot \mathrm{I}_3 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^2 \in \mathbf{F}_4^\times \cdot \mathrm{I}_3.$$

Soit $\lambda \in \mathbf{F}_4^\times$ tel que $\mathrm{A}^2 = \lambda \mathrm{I}_3$. L'application $x \mapsto x^2$ est un automorphisme du corps $\mathbf{F}_4$, donc il existe $\mu \in \mathbf{F}_4^\times$ tel que $\lambda = \mu^2$. Posons $\mathrm{B} = \mu^{-1}\mathrm{A}$; il s'agit d'un élément de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ car

$$\det \mathrm{B} = \mu^{-3} = 1$$

puisque $\mu \in \mathbf{F}_4^\times = \mu_3(\mathbf{F}_4)$. Par ailleurs, B n'est pas une homothétie (sinon, A en serait une) et

$$\mathrm{B}^2 = \mu^{-2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_3,$$

donc B est d'ordre 2. Finalement, comme $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}}$, nous avons démontré que tout élément d'ordre 2 de $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ est l'image d'un élément d'ordre 2 de $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$.

6. Le groupe $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ contient une unique classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 : ceux-ci sont en effet les images des éléments d'ordre 2 dans $\mathrm{SL}(3, \mathbf{F}_4)$ (question 5), lesquels sont tous conjugués (question 4).

Les deux groupes $\mathrm{PSL}(3, \mathbf{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(4, \mathbf{F}_2)$ n'ont pas le même nombre de classes de conjuguaison d'éléments d'ordre 2, donc ils ne sont pas isomorphes.

Exercice 2

1. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{A}^*\mathrm{A} & = & \mathrm{I}_n \\ {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} & = & \mathrm{I}_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} {}^t\mathrm{A} & = & \mathrm{A}^{-1} \\ {}^t\overline{\mathrm{A}} & = & {}^t\mathrm{A} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \overline{\mathrm{A}} & = & \mathrm{A} \\ {}^t\mathrm{A} & = & \mathrm{A}^{-1} \end{array}\right.$$

donc

$$\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{O}(n, \mathbf{C}) = \mathrm{O}(n).$$

2. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{U}(n)$,

$$({}^t\mathrm{A})^* \, {}^t\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}} \, {}^t\mathrm{A} = {}^t(\mathrm{A}\mathrm{A}^*) = {}^t\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n, \quad \text{donc } {}^t\mathrm{A} \in \mathrm{U}(n).$$

La stabilité de $\mathrm{U}(n)$ par inversion est claire puisqu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On peut le vérifier facilement : si l'on pose $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$, alors $\mathrm{B} = \mathrm{A}^*$ et donc

$$\mathrm{B}^*\mathrm{B} = \mathrm{A}\mathrm{A}^* = \mathrm{I}_n,$$

d'où $\mathrm{B} \in \mathrm{U}(n)$.

Considérons une matrice $\mathrm{H} \in \mathcal{H}_n^{++}$, que l'on écrit sous la forme $\mathrm{H} = \exp(\mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} \in \mathcal{H}_n$. Comme

$$\mathrm{H}^* = \exp(\mathrm{R}^*) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^{-1} = \exp(-\mathrm{R}),$$

la conclusion se déduit de la stabilité évidente de $\mathcal{H}_n$ par les deux involutions $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^*$ et $\mathrm{X} \mapsto -\mathrm{X}$.

3. Considérons une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, écrite sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{VR}$ avec $\mathrm{V} \in \mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{R} \in \mathcal{H}_n^{++}$.

Si V et R appartiennent à $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$, alors il en va de même pour A puisque $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Supposons réciproquement que A appartienne à $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$, auquel cas ${}^t\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$. En utilisant l'identité $\mathrm{A} = \mathrm{VR}$, il vient

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}^{-1} = {}^t(\mathrm{R}^{-1}\mathrm{V}^{-1}) = {}^t\mathrm{V}^{-1} \, {}^t\mathrm{R}^{-1}.$$

En vertu de la question précédente, ${}^t\mathrm{V}^{-1} \in \mathcal{H}_n^{++}$ et ${}^t\mathrm{R}^{-1} \in \mathrm{U}(n)$; par unicité de la décomposition polaire hermitienne, on en déduit les identités

$${}^t\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V} \;\text{ et }\; {}^t\mathrm{R}^{-1} = \mathrm{R}$$

et donc $\mathrm{V}, \mathrm{R} \in \mathrm{O}(n, \mathbf{C})$.

4. Considérons une matrice $\mathrm{R} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

Si $\mathrm{R} \in \mathrm{O}(n, \mathbf{C}) \cap \mathcal{H}_n^{++}$, alors il existe une unique matrice $\mathrm{H} \in \mathcal{H}_n$ telle que $\mathrm{R} = \exp(\mathrm{H})$. L'orthogonalité de R se traduit par l'identité $\mathrm{R} = {}^t\mathrm{R}^{-1}$, donc $\exp(\mathrm{H}) = {}^t\exp(\mathrm{H})^{-1} = \exp(-{}^t\mathrm{H})$. Les deux matrices H et $-{}^t\mathrm{H}$ sont hermitiennes, donc $\mathrm{H} = -{}^t\mathrm{H}$ par injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{H}_n$. La matrice complexe H est ainsi simultanément antisymétrique et hermitienne :

$${}^t\mathrm{H} + \mathrm{H} = {}^t\overline{\mathrm{H}} - \mathrm{H} = 0.$$

Ces conditions sont équivalentes aux deux suivantes :

$$\overline{\mathrm{H}} = -\mathrm{H} \;\text{ et }\; {}^t\mathrm{H} + \mathrm{H} = 0,$$

lesquelles signifient que la matrice $\mathrm{T} = -i\mathrm{H}$ est réelle et antisymétrique.

Réciproquement, pour toute matrice réelle et antisymétrique T,

$$\exp(i\mathrm{T})^* = \exp(-i{}^t\mathrm{T}) = \exp(i\mathrm{T}) \quad \text{et} \quad {}^t\exp(i\mathrm{T})\exp(i\mathrm{T}) = \exp(i({}^t\mathrm{T}+\mathrm{T})) = \exp(0) = \mathrm{I}_n$$

puisque T et ${}^t\mathrm{T}$ commutent, donc

$$\exp(i\mathrm{T}) \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \cap \mathcal{H}_n^{++}.$$

5. L'application

$$\Phi : \mathrm{U}(n) \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \quad (\mathrm{V},\mathrm{H}) \longmapsto \mathrm{V}\exp(\mathrm{H})$$

est un homéomorphisme. Elle induit donc un homéomorphisme de $\Phi^{-1}(\mathrm{O}(n,\mathbf{C}))$ sur $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$.

Pour tout couple $(\mathrm{V},\mathrm{H}) \in \mathrm{U}(n) \times \mathcal{H}_n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\exp(\mathrm{H}) \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) &\iff \big(\mathrm{V} \in \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \;\text{ et }\; \exp(\mathrm{H}) \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \cap \mathcal{H}_n^{++}\big) \\ &\iff (\mathrm{V} \in \mathrm{O}(n) \;\text{ et }\; -i\mathrm{H} \in \mathcal{A}_n)\end{aligned}$$

en vertu des questions 1, 3 et 4.

L'application

$$\Psi : \mathrm{O}(n) \times \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathrm{U}(n) \times \mathcal{H}_n, \quad (\mathrm{V},\mathrm{T}) \longmapsto \mathrm{V}\exp(i\mathrm{T})$$

réalise un homéomorphisme sur son image, laquelle est précisément $\Phi^{-1}(\mathrm{O}(n,\mathbf{C}))$ d'après ce qui précède. L'application composée

$$\mathrm{O}(n) \times \mathcal{A}_n \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Im}\ \Psi = \Phi^{-1}(\mathrm{O}(n,\mathbf{C})) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{O}(n,\mathbf{C})$$

$$(\mathrm{V},\mathrm{T}) \longmapsto \mathrm{V}\exp(i\mathrm{T})$$

est donc un homéomorphisme.

6. L'espace topologique $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{A}_n$ n'est pas compact puisqu'il contient le sous-espace fermé non compact $\{1\} \times \mathcal{A}_n$. En vertu de l'homéomorphisme précédent, le groupe topologique $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$ n'est donc pas compact.

7. L'espace topologique $\mathrm{O}(n)$ possède deux composantes connexes : $\mathrm{O}^+(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{O}^-(n) = \mathrm{O}(n) - \mathrm{O}^+(n)$. L'espace topologique $\mathbf{R}^d$ étant connexe, l'homéomorphisme précédent montre que l'espace topologique $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$ possède deux composantes connexes.

Le déterminant d'une matrice orthogonale complexe A satisfait à la condition

$$(\det \mathrm{A})^2 = \det({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) = 1,$$

donc on dispose d'un homomorphisme continu

$$\det : \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \longrightarrow \{\pm 1\}.$$

Cet homomorphisme est surjectif car $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$ est une matrice orthogonale de déterminant -1, donc ses fibres sont des réunions de composantes connexes. Puisque $\mathrm{O}(n,\mathbf{C})$ ne possède que deux composantes connexes, il en découle que ces dernières sont précisément les fibres du déterminant :

$$\{\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \mid \det \mathrm{A} = 1\} \;\text{ et }\; \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n,\mathbf{C}) \mid \det \mathrm{A} = -1\}.$$

Exercice 3

1. Pour tout $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbf{C}^6$,

$$af - be + cd = \frac{1}{4}\left((a+f)^2 - (a-f)^2 - (b+e)^2 + (b-e)^2 + (c+d)^2 - (c-d)^2\right)$$

Les six formes linéaires $a+f, a-f, b+e, b-e, c+d$ et $c-d$ sont indépendantes, donc le pfaffien est une forme quadratique non dégénérée sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}_4 \simeq \mathbf{C}^6$.

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{A} &= -a\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d & 0 & -f \\ e & f & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & -d & -e \\ e & f & 0 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & -d & -e \\ d & 0 & -f \end{vmatrix} \\
&= (af)^2 + (eb)^2 + (cd)^2 + 2acdf - 2abef - 2bcde \\
&= (\mathrm{Pf}\ \mathrm{A})^2.
\end{aligned}$$

2. Supposons que A soit une matrice antisymétrique inversible. En vertu de l'identité $(\mathrm{Pf}\ \mathrm{A})^2 = \det \mathrm{A}$, le pfaffien de A est non nul et l'application

$$\kappa : \mathrm{SL}_4(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}, \quad \mathrm{P} \mapsto \frac{\mathrm{Pf}\ \mathrm{PA}^t\mathrm{P}}{\mathrm{Pf}\ \mathrm{A}}$$

est donc bien définie. Cette application est continue, car polynomiale en les coefficients de P.

Par ailleurs, d'après la question précédente,

$$\kappa(\mathrm{P})^2 = \frac{(\mathrm{Pf}\ \mathrm{PA}^t\mathrm{P})^2}{(\mathrm{Pf}\ \mathrm{A})^2} = \frac{\det \mathrm{PA}^t\mathrm{P}}{\det \mathrm{A}} = (\det \mathrm{P})^2 = 1$$

donc l'application κ est à valeurs dans l'espace discret $\{\pm 1\}$. Comme l'espace topologique $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ est connexe, son image par l'application continue κ l'est également et donc κ est constante, égale à $\kappa(\mathrm{I}_n) = 1$.

3. Fixons $\mathrm{P} \in \mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$. L'application

$$\mathcal{A}_4 \longrightarrow \mathbf{C}, \quad \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Pf}\ \mathrm{PA}^t\mathrm{P} - \mathrm{Pf}\ \mathrm{A}$$

est continue et, en vertu de la question précédente, identiquement nulle sur l'ouvert Ω des matrices antisymétriques inversibles. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de démontrer que Ω est dense dans $\mathcal{A}_4$.

Fixons une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_4$ et désignons par J la matrice antisymétrique inversible

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'application continue $\gamma : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{A}_4, \quad z \longmapsto z\mathrm{A} + (1-z)\mathrm{J}$. Le polynôme $\det(z\mathrm{A} + (1-z)\mathrm{J})$ ne s'annule pas au point 0, donc il n'est pas identiquement nul et ses racines forment un sous-ensemble fini $\mathcal{R}$ de $\mathbf{C}$. Tout point de $\mathbf{C}$ est adhérent à $\mathbf{C}-\mathcal{R}$, donc il existe une suite (z_n) dans $\mathbf{C}-\mathcal{R}$ qui converge vers 1. Les matrices antisymétriques $z_n\mathrm{A} + (1-z_n)\mathrm{J}$ sont toutes inversibles et convergent vers A, donc Ω est bien dense dans $\mathcal{A}_4$.

4. (a) L'action de $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ par congruence sur $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ préserve le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_4$. D'après la question précédente, elle préserve également la forme quadratique Pf, donc l'homomorphisme

$$\varphi : \mathrm{SL}_4(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{A}_4)$$

correspondant à cette action est à valeurs dans le sous-groupe O(Pf). Le groupe $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ étant connexe, son image par l'application continue φ est contenue dans la composante neutre de O(Pf) ; comme $\mathrm{O(Pf)} \simeq \mathrm{O}_6(\mathbf{C})$, cette dernière est le sous-groupe $\mathrm{SO(Pf)} = \mathrm{O(Pf)} \cap \mathrm{SL}(\mathcal{A}_4)$.

(b) Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{PA}^t\mathrm{P} = \mathrm{A}$ pour toute matrice antisymétrique $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_4$.

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_4$ et tout vecteur

$$\mathrm{X} \in \mathbf{C}^4, \quad \mathrm{AX} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{PA}^t\mathrm{PX} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{A}^t\mathrm{PX} = 0$$

donc ${}^t\mathrm{P}$ *stabilise le noyau de chaque matrice antisymétrique.*

Nous allons démontrer que *tout plan* $\Pi \subset \mathbf{C}^4$ peut s'obtenir comme un tel noyau. Il est plus transparent de raisonner en termes de formes bilinéaires alternées : l'espace vectoriel $\mathbf{C}^4/\Pi$ est de dimension 2, donc il existe sur celui-ci une forme antisymétrique non dégénérée $\overline{\Phi}$, de matrice dans une base adaptée $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La forme bilinéaire Φ sur $\mathbf{C}^4$ définie par

$$\Phi(x,y) = \overline{\Phi}(\overline{x}, \overline{y}),$$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ désignent les images de x et y dans $\mathbf{C}^4/\Pi$, est antisymétrique et de noyau Π, donc sa matrice dans une base quelconque de $\mathbf{C}^4$ fournit une matrice antisymétrique A telle que $\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \Pi$ [1].

Les éléments de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ stabilisent ainsi tous les plans de $\mathbf{C}^4$, donc également toutes les droites (intersections de deux plans distincts) ; ce sont par conséquent des homothéties [2]. Finalement, une homothétie $\lambda \mathrm{I}_4$ appartient à $\operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si $\lambda^2 = 1$, donc si et seulement si $\lambda = \pm 1$. Nous pouvons donc conclure que le noyau de φ est égal à $\{\pm \mathrm{I}_4\}$.

5.

$$\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_4(\mathbf{C}) \mid \operatorname{Tr} \mathrm{X} = 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{so}_6(\mathbf{C}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_6(\mathbf{C}) \mid {}^t\mathrm{X} + \mathrm{X} = 0\} = \mathcal{A}_6.$$

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{sl}_4(\mathbf{C}) = 4^2 - 1 = 15 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{so}_6(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15.$$

6. L'homomorphisme

$$\varphi : \mathrm{SL}_4(\mathbf{C}) \longrightarrow \operatorname{End}(\mathcal{A}_4), \quad \mathrm{P} \longmapsto \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{A} \mapsto \mathrm{PA}{}^t\mathrm{P})$$

est différentiable car les coordonnées de $\varphi(\mathrm{P})$ dans une base quelconque de $\operatorname{End}(\mathcal{A}_4)$ sont des polynômes en les coefficients de P. Le noyau de φ étant discret, sa différentielle en 1 est injective [3]. L'image de φ étant contenue dans un sous-groupe de O(Pf), l'application linéaire injective $d\varphi_1 : \mathfrak{sl}_4(\mathbf{C}) \to \operatorname{End}(\mathcal{A}_4)$ est à valeurs dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{o}(\mathrm{Pf}) \simeq \mathfrak{o}_6(\mathbf{C}) = \mathfrak{so}_6\mathbf{C})$; elle réalise donc un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}_6(\mathbf{C})$ puisque ceux-ci ont la même dimension.

En vertu du théorème d'inversion locale, φ induit un difféomorphisme d'un voisinage de 1 dans $\mathrm{SL}_4(\mathbf{C})$ sur un voisinage de 1 dans SO(Pf). L'image de φ est par conséquent un sous-groupe ouvert, donc fermé, de SO(Pf) ; comme SO(Pf) est connexe, on en déduit que l'application φ est surjective. En quotientant par le noyau $\{\pm \mathrm{I}_4\}$ de φ, on obtient au final un isomorphisme de groupes topologiques

$$\mathrm{PSL}_4(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(\mathrm{Pf}) \simeq \mathrm{SO}_6(\mathbf{C}) .$$

1. Si l'on veut traduire cette construction sous forme matricielle, on part d'une base (x_3, x_4) de Π, que l'on complète en une base (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbf{C}^4$. Si l'on prend pour $\overline{\Phi}$ la forme forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ de $\mathbf{C}^4/\Pi$, alors la matrice de Φ dans (x_1, x_2, x_3, x_4) est la matrice B de l'énoncé. La matrice A de Φ dans la base canonique est obtenue en calculant $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{QBQ}$, où Q est la matrice de l'application linéaire envoyant (x_1, x_2, x_3, x_4) sur la base canonique.

2. L'indication de l'énoncé suggérait une démonstration un peu différente. Pour tout $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \varphi$, l'identité $\mathrm{PB}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{B}$ implique que ${}^t\mathrm{P}$ stabilise le noyau $\operatorname{Vect}(\mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4)$ de B, donc ${}^t\mathrm{PE}_3 \in \operatorname{Vect}(\mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4)$ et ${}^t\mathrm{PE}_1 \notin \operatorname{Vect}(\mathrm{E}_3, \mathrm{E}_4)$. Supposons qu'il existe un vecteur $\mathrm{X} \in \mathbf{C}^4 - \{0\}$ tel que ${}^t\mathrm{PX}$ et X ne soient pas colinéaires. Il existe alors une matrice inversible Q telle que ${}^t\mathrm{QX} = \mathrm{E}_1$ et ${}^t\mathrm{Q}{}^t\mathrm{PX} = \mathrm{E}_3$. Par construction, le vecteur X appartient au noyau de la matrice antisymétrique $\mathrm{PQB}{}^t\mathrm{Q}{}^t\mathrm{P}$, laquelle est égale à $\mathrm{QB}{}^t\mathrm{Q}$ puisque P est dans le noyau de φ. On en déduit alors que le vecteur $\mathrm{E}_1 = {}^t\mathrm{QX}$ appartient au noyau de B, ce qui est une contradiction. Nous avons ainsi démontré que le noyau de φ est composé d'homothéties.

3. Rappelons la démonstration de ce fait : étant donné X dans le noyau de $d\varphi_1$, l'image du sous-groupe à un paramètre $\lambda(t) = \exp(t\mathrm{X})$ est triviale car

$$\frac{d}{dt}\varphi(\exp(t\mathrm{X}))\Big|_{t=t_0} = \varphi(\exp(t_0\mathrm{X})d\varphi_1(\mathrm{X}) = 0$$

pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$. Ce sous-groupe à un paramètre est donc contenu dans le sous-groupe discret $\operatorname{Ker} \varphi$, donc est trivial par continuité de l'exponentielle et connexité de $\mathbf{R}$. On en déduit finalement :

$$\mathrm{X} = \lambda'(0) = 0.$$