Université Lyon 1 – 2012-2013
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 2 – Produits semi-directs, topologie

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ un corps commutatif. À partir de l'exercice 6, G désigne un groupe topologique séparé d'élément neutre 1.

Exercice 1 (Sous-groupe parabolique) — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On fait agir naturellement GL(E) sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d. Exhiber une structure de produit semi-direct (non triviale...) sur le stabilisateur d'un sous-espace.

Exercice 2 (Matrices de rang r) — Soit m, n deux entiers naturels non nuls. On considère l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ définie par $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \cdot \mathrm{A} = \mathrm{PAQ}^{-1}$.

1. Étant donné $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$, déterminer le stabilisateur G_r de la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Expliciter la structure de groupe sur G_r. En déduire que G_r est isomorphe à un produit semi-direct $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$, où $\mathrm{N} = \mathrm{M}_{r,m-r}(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbf{K})$ (vu comme un groupe pour l'addition), $\mathrm{H} = \mathrm{GL}_r(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_{m-r}(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbf{K})$ et φ est une action de H sur N que l'on précisera.

Exercice 3 (Groupe affine) — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. Soit $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$, ou plus simplement GA, le groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$ et GL(E), ou simplement GL, le groupe des bijections linéaires de E. On souhaite exhiber et interpréter un isomorphisme (non canonique) :

$$\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{E} \rtimes \mathrm{GL}(\mathrm{E}).$$

Soit T le sous-groupe de GA formé des translations. Il est isomorphe à E par l'application qui, à $v \in \mathrm{E}$, associe la translation $t_v \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ de vecteur v. Soit o un point de $\mathcal{E}$ et GA_o le stabilisateur de o.

1. Soit $f \in \mathrm{GA}$ et $v \in \mathrm{E}$. Donner une expression simple de $f \circ t_v \circ f^{-1}$. En déduire que T est distingué.
2. Vérifier que GA_o est isomorphe à GL. Montrer que toute application $f \in \mathrm{GA}$ s'écrit de façon unique comme une composée $t_v \circ g$ (respectivement $g \circ t_v$) avec $v \in E$ et $g \in \mathrm{GA}_o$.
3. Étant donné une application $f \in \mathrm{GA}$, on note $\mathrm{L}(f) \in \mathrm{GL}$ l'application linéaire associée. Vérifier que l'on a une suite exacte :
$$1 \to \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \to 1.$$
4. Exhiber une section de L et en déduire la structure de produit semi-direct.
5. On suppose à présent que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien. On note $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ les groupe des isométries (affines) de $\mathcal{E}$ et Is(E) le groupe des isométries vectorielles de E. Montrer que l'on a un isomorphisme : $\mathrm{Is}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{T} \rtimes \mathrm{Is}(\mathrm{E})$.

Exercice 4 (Retour sur la décomposition de Bruhat) — On reprend les notations de l'exercice 5 de la première fiche. On considère la permutation σ_0 produit des $\left[\frac{p}{2}\right]$ transpositions (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant p$ et $i + j = p + 1$, et on pose $\Omega(\mathbf{K}) = \mathrm{U}(\mathbf{K})\mathrm{W}_{\sigma_0}\mathrm{B}(\mathbf{K})$.

1. Décrire $\Omega(\mathbf{K})$ comme un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ défini par la non-annulation de certains mineurs.
2. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et soit $\mathrm{P} \in \mathbf{K}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$. Démontrer que si P s'annule identiquement sur en ouvert non vide de $\mathbf{K}^n$, alors P est identiquement nul (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur n)
3. Toujours avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, en déduire que $\Omega(\mathbf{K})$ est une partie ouverte et dense de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$.

Exercice 5* (Endomorphismes diagonalisables) — Soit $\mathrm{D}(\mathbf{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\Sigma_n(\mathbf{K}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

1. Supposons que $\mathbf{K}$ soit $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Démontrer que l'application $\chi : \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^n$, associant à une matrice M les coefficients $a_0(\mathrm{M}), \ldots, a_{n-1}(\mathrm{M})$ de son polynôme caractéristique
$$\det(\mathrm{TI}_n - \mathrm{M}) = \mathrm{T}^n + a_{n-1}(\mathrm{M})\mathrm{T}^{n-1} + \ldots + a_0(\mathrm{M}),$$
est continue.
2. Démontrer que l'ensemble des n-uplets $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tels que toutes les racines du polynôme $\mathrm{T}^n + a_{n-1}\mathrm{T}^{n-1} + \ldots + a_0$ soient simples est une partie ouverte et dense. (*Indication* : utiliser le discriminant, dont la définition est rappelée ci-dessous).
3. En déduire que $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$ et $\Sigma_n(\mathbf{C})$ sont denses dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, et que $\Sigma_n(\mathbf{C})$ est l'intérieur de $\mathrm{D}_n(\mathbf{C})$.
4. Démontrer que $\mathrm{D}_2(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$.

Rappel : résultant et discriminant – Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d.

Soit $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{K}[\mathrm{T}]$ deux polynômes de degrés respectifs $p, q \geqslant 1$. Considérons l'application linéaire
$$\Phi : \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant q-1} \oplus \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant p-1} \to \mathbf{K}[\mathrm{T}]_{\leqslant p+q-1}, \quad (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \mapsto \mathrm{PU} + \mathrm{QV}.$$

(i) Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si Φ est un isomorphisme. (*Indication* : considérer l'injectivité (resp. la surjectivité) de Φ pour voir que la condition est nécessaire (resp. suffisante))

(ii) Écrivons $\mathrm{P} = a_p\mathrm{T}^p + a_{p-1}\mathrm{T}^{p-1} + \ldots + a_0$ et $\mathrm{Q} = b_q\mathrm{T}^q + b_{q-1}\mathrm{T}^{q-1} + \ldots + b_0$. Expliciter la matrice de Φ par rapport aux bases $(1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{q-1}; 1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{p-1})$ et $(1, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^{p+q-1})$. En déduire qu'il existe un polynôme $\mathrm{R} \in \mathbf{K}[\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p, \mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_q]$ tel que
$$\det \Phi = \mathrm{R}(a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q).$$

Par définition, $\det \Phi$ est le *résultant* des polynômes P et Q ; on le note $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$. Par construction, c'est un élément de $\mathbf{K}$ qui s'annule si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Pour un polynôme P de degré p, on pose $\mathrm{disc}(\mathrm{P}) = (-1)^{p(p-1)/2}\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$; c'est le *discriminant* de P. On observe que $\mathrm{disc}(\mathrm{P})$ est un polynôme en les coefficients de P.

(iii) Calculer $\mathrm{disc}(\mathrm{P})$ pour $\mathrm{P} = a\mathrm{T}^2 + b\mathrm{T} + c$, puis pour $\mathrm{P} = \mathrm{T}^3 + a\mathrm{T} + b$.

Exercice 6 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques) —

1. Soit $g_0 \in \mathrm{G}$. Montrer que les applications $\mathrm{L}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g_0 g$ et $\mathrm{R}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
2. Démontrer que si $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$ est un ouvert et $\mathrm{V} \subset \mathrm{G}$ est une partie quelconque, alors $\mathrm{U}^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in \mathrm{U}\}$ et $\mathrm{UV} = \{uv \mid u \in \mathrm{U}, v \in \mathrm{V}\}$ sont ouverts.
3. Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

   En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé : donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV n'est pas fermé.

Exercice 7 (Voisinages) —

1. Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0$, (resp. $g_0\mathrm{V}$) forment un système fondamental de voisinages de g_0.
2. Démontrer que l'application $f : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0\mathrm{V}^{-1}$ forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G.

Exercice 8 (Adhérences) — On désigne par $\overline{\mathrm{A}}$ l'adhérence de la partie A de G.

1. (a) Soit U un voisinage de 1 et soit g, h dans G. Montrer qu'il existe un ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que $g\mathrm{V}h\mathrm{V} \subset gh\mathrm{U}$.
   (b) En déduire que si g et h sont dans les adhérences $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ de parties A et B de G, alors $gh\mathrm{U} \cap \mathrm{AB} \neq \varnothing$.
   (c) Démontrer que $\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{AB}}$.
2. Prouver l'égalité $\overline{\mathrm{A}}^{-1} = \overline{\mathrm{A}^{-1}}$.
3. Montrer que pour tout g, h dans G, $g\,\overline{\mathrm{A}}\,h = \overline{g\mathrm{A}h}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$. En considérant l'application $f : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}$.
5. Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G, puis que $\overline{\mathrm{H}}$ est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 9 (Composante neutre) — Soit G° la composante connexe de 1.

1. Démontrer que G° est fermée.
   Remarque : il peut arriver que G° *ne soit pas ouvert ; voir un contre-exemple à la fin de l'exercice suivant.*
2. Démontrer que $g\mathrm{G}^\circ$ est la composante connexe de g. Démontrer que G° est stable par conjugaison.
3. Démontrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G°, alors $\mathrm{H} = \mathrm{G}^\circ$.
4. Démontrer que si G est connexe, alors tout voisinage V de 1 engendre G, i.e.
$$\mathrm{G} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{V}^n.$$
   (*Indication* : observer que, quitte à restreindre V, on peut supposer $\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V}$).
5. Démontrer que G° est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans G.

Exercice 10 (Sous-groupes de $\mathbf{R}$) —

1. Soit H un sous-groupe non trivial de $\mathbf{R}$ et soit a la borne inférieure de $\mathrm{H} \cap \mathbf{R}_{>0}$.
   (a) Démontrer que si a est non nul, alors $\mathrm{H} = a\mathbf{Z}$.
   (b) Démontrer que si a est nul, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (c) En déduire que tout sous-groupe de $\mathbf{R}$ est soit cyclique, soit dense.
2. Soit α un nombre réel et soit $\mathrm{H} = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
   (a) Supposons que α soit rationnel et écrivons $\alpha = \frac{u}{v}$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Démontrer que $\mathrm{H} = \frac{d}{v}\mathbf{Z}$, où $d = \mathrm{pgcd}(u, v)$.
   (b) Démontrer que, si α est irrationnel, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (c) En déduire que tout élément de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (d) En déduire également qu'il existe une puissance de 2 dont l'écriture décimale commence par 12345.
3. Soit G le groupe quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, muni de la topologie quotient ; on note $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathrm{G}$ la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel ϑ. On note H_0 le sous-groupe de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x, y) tels que $y = \theta x$, H son image par la projection π et $\tilde{\mathrm{H}}$ la saturation de H_0, c'est-à-dire :
$$\tilde{\mathrm{H}} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{H}_0)).$$
   Démontrer que $\tilde{\mathrm{H}}$ est dense dans $\mathbf{R}^2$ et en déduire que H est dense dans G. Le groupe quotient G/H est-il séparé ?
4. On considère le sous-groupe $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ muni de la topologie métrique induite.
   (a) Démontrer que $\mathbf{Q}$ n'est pas discret.
   (b) Démontrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.