

### Fiche 3 – Groupes topologiques et groupes classiques

**Exercice 1** (Caractérisation locale d'un groupe topologique) — Soit  $G$  un groupe.

1. Dans cette question, on suppose que  $G$  est muni d'une topologie qui en fait un groupe topologique. On désigne par  $\mathcal{V}(1)$  l'ensemble des voisinages de 1. Démontrer que les cinq conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) toute partie de  $G$  contenant un élément de  $\mathcal{V}(1)$  appartient à  $\mathcal{V}(1)$  ;
- (ii)  $\mathcal{V}(1)$  est stable par intersections finies ;
- (iii) pour tout  $V \in \mathcal{V}(1)$ , il existe  $W \in \mathcal{V}(1)$  tel que  $W^2 \subset V$  ;
- (iv)  $\mathcal{V}(1)$  est stable sous la bijection

$$\mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G), \quad V \mapsto V^{-1} ;$$

- (v) pour tout  $g \in G$ ,  $\mathcal{V}(1)$  est stable sous la bijection

$$\mathcal{P}(G) \rightarrow \mathcal{P}(G), \quad V \mapsto gVg^{-1}.$$

Démontrer en outre que si  $G$  est séparé, alors :

- (vi)  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(1)} V = \{1\}$ .

2. Réciproquement, supposons que  $\mathcal{V}(1)$  soit un ensemble de parties de  $G$  satisfaisant aux conditions (i)-(v) ci-dessus. Démontrer qu'il existe une et une seule topologie sur  $G$  qui en fasse un groupe topologique et pour laquelle  $\mathcal{V}(1)$  soit l'ensemble des voisinages de 1. De plus, si  $\mathcal{V}(1)$  vérifie la condition (vi), démontrer que cette topologie est alors séparée.

**Exercice 2** (Connexité de  $SL_n$ ) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

- 1. Démontrer que toute matrice de transvection se déforme continuellement sur  $I_n$  dans  $SL_n(\mathbf{K})$ .
- 2. En déduire que le groupe topologique  $SL_n(\mathbf{K})$  est connexe (par arcs). (*Indication* : utiliser l'exercice 4 de la fiche 1).

**Exercice 3** (Groupes classiques compacts) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ . Démontrer que les groupes topologiques  $U(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SU(n)$  et  $SO(n)$  sont compacts.

**Exercice 4** (Connexité) — Soit  $G$  un groupe topologique séparé et soit  $H$  un sous-groupe fermé.

- 1. Démontrer qu'un espace topologique  $X$  est connexe si et seulement si, pour tous ouverts non vides  $U, V \subset X$  tels que  $X = U \cup V$ , l'intersection  $U \cap V$  est non vide.
- 2. Démontrer que, si  $H$  et  $G/H$  sont connexes, alors  $G$  est connexe. L'assertion réciproque est-elle vraie ?
- 3. En guise d'application, démontrer que

$$GL_n(\mathbf{R})_+ = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

est la composante connexe de  $GL_n(\mathbf{R})$  contenant l'identité (la *composante neutre*).

**Exercice 5** (Connexité des groupes orthogonaux et unitaires) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ . On considère l'action naturelle des groupes  $O_n(\mathbf{R})$  et  $SO_n(\mathbf{R})$  sur  $\mathbf{R}^n$ .

1. Déterminer le stabilisateur et l'orbite du premier vecteur de la base canonique.
2. Supposons  $n \geq 2$ . Démontrer que la sphère unité

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

est connexe. (*Indication* : on pourra raisonner sur des hémisphères).

3. Dédurre de ce qui précède que  $\mathbf{S}^{n-1}$  est homéomorphe à l'espace homogène  $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbf{R})$ , puis que le groupe  $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$  est connexe pour tout  $n \geq 1$ . (*Indication* : raisonner par récurrence sur  $n$  en utilisant l'exercice 2).
4. Déterminer les composantes connexes de  $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ .
5. Adapter ce raisonnement pour démontrer que les groupes  $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$  et  $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$  sont connexes.

**Exercice 6** (Groupes linéaires/orthogonaux et produit semi-direct) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ .

1. Démontrer que  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  est isomorphe à un produit semi-direct topologique de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$  par  $\mathbf{R}^\times$ . Idem sur  $\mathbf{C}$ .
2. Démontrer que le groupe orthogonal  $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$  est isomorphe à un produit semi-direct topologique de  $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$  par  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Pour quelles valeurs de  $n$  ce produit est-il direct (c'est-à-dire isomorphe au produit direct des deux groupes) ?

**Exercice 7\*** (Exponentielle) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . On considère l'application exponentielle

$$\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathrm{M}_n(\mathbf{K}), \quad A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

1. Justifier soigneusement le bien-fondé de cette définition.
2. Démontrer que si  $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$  sont deux matrices qui commutent, alors  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ .
3. En utilisant la série entière du logarithme  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{A^n}{n}$ , démontrer que l'image de  $\exp$  contient un voisinage de  $\mathrm{I}_n$ .
4. Si  $n = 1$ , en déduire :  $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$ . Peut-on faire le même raisonnement lorsque  $n \geq 2$  ?
5. Démontrer que  $\exp$  induit un homéomorphisme entre les (sous-)espaces topologiques

$$\mathrm{Nil}_n(\mathbf{K}) = \{N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid N \text{ est nilpotent}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Unip}_n(\mathbf{K}) = \{U \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \mid U \text{ est unipotent}\}.$$

Pour tout  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ , on va prouver la surjectivité de l'application  $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  en adaptant le raisonnement de la question 4. Plus précisément, on se propose de démontrer le théorème suivant :

*pour toute matrice  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ , il existe une matrice  $B \in \mathbf{C}[A]$  telle que  $A = \exp(B)$ .*

Rappelons tout d'abord la *décomposition de Dunford-Jordan* :

- (a) Version *additive* : pour toute matrice  $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ , il existe une matrice diagonalisable  $D$  et une matrice nilpotente  $N$  dans  $\mathbf{C}[A]$  telles que  $A = D + N$ .
  - (m) Version *multiplicative* : si  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ , alors  $D \in \mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ , la matrice  $U = \mathrm{I}_n + D^{-1}N \in \mathbf{C}[A]$  est unipotente et  $A = DU$ .
6. Soit  $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ . Avec les notations ci-dessus, démontrer que  $\exp(N)$ ,  $\exp(D)$  et donc  $\exp(A)$  appartiennent à  $\mathbf{C}[A]^\times$ . (*Indication* : c'est facile pour  $\exp(N)$ . Pour  $\exp(D)$ , écrire  $D = Q \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) Q^{-1}$  et utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange  $P$  tel que  $P(d_i) = e^{d_i}$  pour tout  $i$  pour obtenir  $\exp(D) \in \mathbf{C}[D]$ ).

7. De manière analogue, démontrer que, si  $A$  est suffisamment proche de l'identité, alors  $\log(A)$  est bien défini et appartient à  $\mathbf{C}[A]$ .

Fixons maintenant  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ . On munit  $\mathbf{C}[A]$  et  $\mathbf{C}[A]^\times$  des topologies induites par celle de  $M_n(\mathbf{C})$ .

8. Démontrer que  $\mathbf{C}[A]$  et  $\mathbf{C}[A]^\times$  sont des groupes topologiques connexes.  
 9. Démontrer que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes  $\mathbf{C}[A] \rightarrow \mathbf{C}[A]^\times$  dont l'image contient un voisinage de 1, puis conclure.

Sur les réels, la situation est moins favorable.\*

10. Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , démontrer que  $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$  (*Indication* : trigonaliser  $A$  sur  $\mathbf{C}$ ). En déduire que la matrice  $\mathrm{diag}(-1, -2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})_+$  n'est pas une exponentielle réelle.  
 11. En utilisant l'exercice 9 de la fiche 2, démontrer cependant que toute matrice  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$  est un produit d'exponentielles réelles.

**Exercice 8\*** (Sous-groupes abéliens compacts de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ ) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ . On commence par considérer une matrice  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  telle que la suite  $(A^n)_{n \in \mathbf{Z}}$  soit bornée et on prouve que  $A$  est diagonalisable.

- Démontrer que toutes les valeurs propres de  $A$  sont des nombres complexes de module 1.
- Soit  $A = DU$  la décomposition de Dunford-Jordan multiplicative de  $A$  (cf. exercice 7). Démontrer que les suites  $(D^n)_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $(U^n)_{n \in \mathbf{Z}}$  sont bornées.
- L'objectif est maintenant de prouver que  $U = I_n$ . Par trigonalisation, on peut supposer que  $U$  appartient au sous-groupe unipotent standard  $U(\mathbf{C})$  des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité.
  - Exhiber une suite de composition

$$1 = U_0 \triangleleft U_1 \triangleleft \dots \triangleleft U_{n-2} \triangleleft U_{n-1} = U(\mathbf{C})$$

telle que l'on ait un isomorphisme de groupes topologiques  $U_i/U_{i-1} \simeq (\mathbf{C}, +)^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

- En raisonnant par induction descendante, démontrer que  $U \in U_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , c'est-à-dire  $U = I_n$ .

En guise d'application de ce qui précède, démontrer que tout sous-groupe compact abélien  $K$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$  est, à conjugaison près, contenu dans le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients (non nuls) de module 1.

**Exercice 9\*** (Groupe de Heisenberg) — Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $G$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_{n+2}(\mathbf{R})$  formé des matrices de la forme

$$[x, y, z] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & & 0 & y_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & & \ddots & y_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad z \in \mathbf{R}.$$

- Calculer le produit  $[x, y, z][x', y', z']$  de deux éléments de  $G$ .
- Quel est le centre  $Z$  de  $G$ ? Montrer que  $G/Z$  est isomorphe à  $\mathbf{R}^{2n}$  comme groupe topologique.
- Le groupe  $G$  est-il isomorphe au produit semi-direct de  $\mathbf{R}^{2n}$  par  $Z$ ?