Université Lyon 1 – 2012-2013
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

# Fiche 5 — Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

**Exercice 1** (Classification des formes quadratiques sur un corps fini) — Le corps $\mathbf{K}$ est supposé fini. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique $\varphi$.

1. Soit $a, b \in \mathbf{K} - \{0\}$. Démontrer que, pour tout $c \in \mathbf{K}$, il existe $x, y \in \mathbf{K}$ tels que $ax^2 + by^2 = c$ (dénombrer les valeurs possibles pour $ax^2$ et $c - by^2$).
2. En déduire que, si $\varphi$ est de rang au moins 2, alors l'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbf{K}$ est surjective.
3. Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de $\varphi$ est $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, \delta, 0, \dots, 0)$, où $\delta\mathbf{K}^{\times,2}$ est le discriminant [1] de $\varphi$. En déduire que deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang et le même discriminant.

**Exercice 2** (Le théorème de simplification de Witt) — Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_m(\mathbf{K})$ et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathrm{S}_n(\mathbf{K})$ trois matrices symétriques. Le *théorème de simplification* de Witt affirme que les matrices $\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{A}_2)$ sont congruentes si et seulement si les matrices $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ le sont (il est clair que la condition est suffisante).

Démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou un corps fini.

**Exercice 3** (Isotropie et hyperbolicité) — Soit $\varphi$ une forme quadratique sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est dit isotrope si $\varphi(x) = 0$ ; un sous-espace vectoriel F de E est dit *totalement isotrope* si $\varphi_{|\mathrm{F}} = 0$.

On suppose que $\varphi$ est *non dégénérée* et on désigne par $b$ sa forme polaire.

1. Soit $x \in \mathrm{E}$ un vecteur isotrope non nul.
   (i) Démontrer qu'il existe un vecteur $z \in \mathrm{E}$ tel que $b(x, z) = 1$ (utiliser la régularité de $\varphi$).
   (ii) En déduire qu'il existe un vecteur $y \in \mathrm{E}$ tel que $b(x, y) = 1$ et $q(y) = 0$, puis vérifier que $x$ et $y$ engendrent un plan (chercher $y$ sous la forme $y = \lambda x + z$).

Tout plan $\mathrm{P} \subset \mathrm{E}$ engendré par deux vecteurs isotropes est dit *hyperbolique*. Plus généralement, un sous-espace vectoriel $\mathrm{H} \subset \mathrm{E}$ est dit *hyperbolique* s'il peut s'écrire comme une somme directe orthogonale de plans hyperboliques.

2. Démontrer qu'un plan $\mathrm{P} \subset \mathrm{E}$ est hyperbolique si et seulement si le discriminant de $\varphi_{|\mathrm{P}}$ est $(-1)\mathbf{K}^{\times,2}$.
3. Démontrer que deux sous-espaces hyperboliques de E de même dimension sont isométriques.
4. Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ un sous-espace totalement isotrope. On va démontrer qu'il existe une *extension hyperbolique* de F, c'est-à-dire un sous-espace hyperbolique $\mathrm{H} \subset \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ et $\dim \mathrm{H} = 2 \dim \mathrm{F}$.

   La conclusion est immédiate si $\mathrm{F} = 0$, donc on peut supposer $\mathrm{F} \neq 0$. Soit $\{x_1, \dots, x_d\}$ une base de F.
   (i) Démontrer qu'il existe un vecteur $y_1 \in \mathrm{E}$ tel que $b(x_i, y_1) = \delta_{i1}$ et $q(y_1) = 0$, puis vérifier que la famille $\{x_1, \dots, x_d, y_1\}$ est libre (raisonner comme en 1).

1. Le *discriminant* $\mathrm{disc}(\varphi)$ d'une forme quadratique $\varphi$ est un élément du groupe quotient $\mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times,2}$. Si $\varphi$ est *non dégénérée*, c'est la classe de $\det(\mathrm{A})$, où A est la matrice de $\varphi$ dans une base quelconque de E ; en général, $\varphi$ induit une forme quadratique non dégénérée $\overline{\varphi}$ sur $\mathrm{E}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et on pose $\mathrm{disc}(\varphi) = \mathrm{disc}(\overline{\varphi})$.

(ii) En raisonnant par induction, construire des vecteurs $y_1, \ldots, y_d$ dans E tels que $b(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ et $b(y_i, y_j) = 0$. Conclure.

m **Exercice 4** (Le théorème de prolongement de Witt) — Soit $\varphi$ une forme quadratique non dégénérée sur un **K**-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathrm{F}, \mathrm{F}' \subset \mathrm{E}$ deux sous-espaces vectoriels. Le *théorème de prolongement* de Witt affirme que toute isométrie $f : (\mathrm{F}, \varphi_{|\mathrm{F}}) \to (\mathrm{F}', \varphi_{|\mathrm{F}'})$ se prolonge en une isométrie globale $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{O}(\mathrm{E}, \varphi)$.

1. En utilisant le théorème de prolongement de Witt, démontrer que le groupe $\mathrm{O}(\mathrm{E}, \varphi)$ opère transitivement sur :
   (i) chaque nappe $\mathrm{H}_c = \{x \in \mathrm{E} \mid \varphi(x) = c\}$ ;
   (ii) l'ensemble des sous-espaces hyperboliques de même dimension (cf. exercice 3).

On se propose maintenant de déduire le théorème de prolongement du théorème de simplification (exercice 2). Posons $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp$ et $\mathrm{F}'_0 = \mathrm{F}' \cap (\mathrm{F}')^\perp$.

2. Vérifier que $f$ envoie $\mathrm{F}_0$ sur $\mathrm{F}'_0$.
3. Supposons que l'on ait $\mathrm{F}_0 = 0$, ce qui revient à dire que la restriction de $\varphi$ à F est non dégénérée. En écrivant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F}' \oplus (\mathrm{F}')^\perp$, déduire le théorème de prolongement du théorème de simplification.
4. Supposons que l'on ait $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$, ce qui revient à dire que F est un sous-espace totalement isotrope.
   (i) Vérifier que $\mathrm{F}'$ est aussi un sous-espace totalement isotrope de E.
   (ii) Soit H et $\mathrm{H}'$ des extensions hyperboliques de F et $\mathrm{F}'$ (cf. exercice 3). Démontrer que $f$ se prolonge en une isométrie $h : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$.
   (iii) Prolonger $h$ en un élément de $\mathrm{O}(\mathrm{E}, \varphi)$ en utilisant le point 3.
5. Traitons maintenant le cas général. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{F}_0$ dans F ; d'après le point 2, $\mathrm{G}' = f(\mathrm{G})$ est un supplémentaire de $\mathrm{F}'_0$ dans $\mathrm{F}'$.
   (i) Vérifier que $\mathrm{G} \cap \mathrm{G}^\perp = 0$ et que $\mathrm{F}_0$ est un sous-espace totalement isotrope de $\mathrm{G}^\perp$.
   (ii) En déduire que l'isométrie $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ induite par $f$ se prolonge en une isométrie globale $g \in \mathrm{O}(\mathrm{E}, \varphi)$ qui envoie $\mathrm{G}^\perp$ sur $(\mathrm{G}')^\perp$ (utiliser le point 3).
   (iii) En utilisant le point 4, démontrer qu'il existe une isométrie $h : \mathrm{G}^\perp \to (\mathrm{G}')^\perp$ induisant $g^{-1} \circ f$ sur $\mathrm{F}_0$.
   (iv) Conclure.

**Exercice 5** (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On désigne par $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E et par $\mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$ le sous-ensemble des formes *non dégénérées*. On désigne en outre par sgn l'application $\mathcal{Q}(\mathrm{E}) \to \mathbf{N}^2$ associant à une forme quadratique sa signature.

1. En utilisant l'action naturelle de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ sur $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$, démontrer que les fibres de sgn sont connexes par arcs.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$. On considère la matrice A de $\varphi$ dans une base de E. Si tous les mineurs principaux $\Delta_i(\mathrm{A})$ sont non nuls, démontrer que A est congruente à la matrice
$$\mathrm{diag}(\Delta_1(\mathrm{A}), \Delta_2(\mathrm{A})/\Delta_1(\mathrm{A}), \ldots, \Delta_n(\mathrm{A})/\Delta_{n-1}(\mathrm{A})).$$
3. En déduire que l'application $\mathrm{sgn} : \mathcal{Q}^*(\mathrm{E}) \to \mathbf{N}^2$ est continue (en munissant $\mathbf{N}^2$ de la topologie discrète). Est-ce encore vrai en remplaçant $\mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$ par $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$ ?
4. Soit $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ avec $r + s = \dim \mathrm{E}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathrm{sgn}^{-1}(r, s)$.