

## Fiche 6 — Décomposition polaire

**Exercice 1** (Exponentielle réelle) — On désigne par  $A_n(\mathbf{R})$  le sous-espace de  $M_n(\mathbf{R})$  formé des matrices antisymétriques.

1. Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbf{C})$ , démontrer que le spectre de  $\exp(A)$  est  $\{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

1. En déduire que la matrice  $M_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle (*indication* : sinon, voir que  $M_0$  serait diagonalisable sur  $\mathbf{C}$ ).

2. Démontrer l'identité

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

pour tout  $\vartheta \in \mathbf{R}$ .

3. À l'aide de l'exercice 1 de la fiche 4, en déduire que l'exponentielle induit par restriction une application surjective

$$\exp : A_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \text{SO}(n).$$

4. Démontrer que toute matrice  $M \in \text{GL}(n, \mathbf{R})_+$  s'écrit comme le produit de deux exponentielles réelles.

**Exercice 2** (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts de  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ ) — Soit  $G$  un sous-groupe compact de  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  contenant  $O(n)$ . Soit  $A \in G$ .

1. Soit  $A = OS$  la décomposition polaire de  $A$ , i.e.  $O \in O(n)$  et  $S \in S_n^{++}$ . Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad S^k \in G.$$

2. En déduire que 1 est l'unique valeur propre de  $S$  (utiliser une norme sur  $\mathbf{R}^n$ ).

3. En déduire  $G = O(n)$ .

**Exercice 3** (Réduction des endomorphismes hermitiens) — Soit  $E$  un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien  $(\cdot \mid \cdot)$ . Soit  $f \in \text{End}(E)$  un endomorphisme auto-adjoint :

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$

1. Démontrer qu'il existe une droite  $W$  dans  $E$  telle que  $f(W) \subset W$  et  $f(W^\perp) \subset W^\perp$ .

2. En déduire que toute matrice hermitienne est  $U(n)$ -diagonalisable.

Soit  $H_n$  (resp.  $H_n^{++}$ ) le sous-ensemble de  $M_n(\mathbf{C})$  formé des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives).

3. En adaptant la preuve du cours pour les matrices symétriques réelles, démontrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre  $H_n$  et  $H_n^{++}$ .

4. En déduire que, pour tout entier  $k \in \mathbf{Z}$ , l'application

$$H_n^{++} \longrightarrow H_n^{++}, \quad H \mapsto H^k$$

est un homéomorphisme.

**Exercice 4** (Décomposition polaire dans  $GL_n(\mathbf{C})$ ) — D'après l'exercice précédent, l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de  $H_n$  sur  $H_n^{++}$ . On désigne par  $\ell : H_n^{++} \rightarrow H_n$  l'homéomorphisme réciproque.

1. Démontrer que les applications

$$U(n) \times H_n \longrightarrow GL_n(\mathbf{C}), \quad (U, H) \longmapsto UH$$

et

$$GL_n(\mathbf{C}) \longrightarrow U(n) \times H_n, \quad M \longmapsto \left( Me^{-\frac{1}{2}\ell({}^t\overline{MM})}, \frac{1}{2}\ell({}^t\overline{MM}) \right)$$

sont des homéomorphismes bien définis et réciproques l'un de l'autre.

2. En déduire que  $GL_n(\mathbf{C})$  est homéomorphe à  $U(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$ .
3. En adaptant le raisonnement de l'exercice 7, démontrer que  $U(n)$  est un sous-groupe compact maximal de  $GL_n(\mathbf{C})$ .

**Exercice 5** (Décomposition polaire des groupes classiques) — Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbf{C})$ . On suppose que  $G$  est stable sous l'application  $M \mapsto M^* = {}^t\overline{M}$  et que  $G \cap H_n^{++}$  est stable par passage à la racine carrée (cf. exercice 3, question 4).

Démontrer que l'application naturelle  $(G \cap U(n)) \times (G \cap H_n^{++}) \longrightarrow G$  est un homéomorphisme.

**Exercice 6** (Décomposition polaire des groupes classiques, suite) — Soit  $J \in M_n(\mathbf{C})$  une matrice telle que  $J^2 = \pm I_n$ . On pose

$$G = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid M^*JM = J\}.$$

1. Démontrer que  $G$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbf{C})$ .
2. Démontrer l'identité

$$M^*JMJM^* = M^*J^2$$

pour tout  $M \in G$ . En déduire que  $G$  est stable sous l'application  $M \mapsto M^*$ .

3. Soit  $M \in G \cap H_n^{++}$ .
  - (i) Démontrer qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbf{R}[X]$  tel que  $\sqrt{M} = P(M)$  et  $\sqrt{M}^{-1} = P(M^{-1})$ .
  - (ii) En déduire que  $\sqrt{M}$  appartient à  $G \cap H_n^{++}$ .
4. En adaptant le raisonnement de l'exercice 2 démontrer que  $G \cap U(n)$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ .

**Exercice 7** (Décomposition polaire des groupes classiques, fin) — La lettre  $\mathbf{K}$  désigne le corps  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice précédent et on pose par ailleurs

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}} = \{M \in M_n(\mathbf{K}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tM) \in G\}.$$

1. Démontrer que  $\mathfrak{g}$  est l'ensemble des matrices  $M \in M_n(\mathbf{K})$  telles que  $M^*J + JM = 0$ ; en particulier, il s'agit d'un sous-espace vectoriel réel de  $M_n(\mathbf{K})$ .
2. Expliciter  $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$  lorsque  $J = I_n$ .
3. Soit  $M \in G \cap H_n^{++}$ . D'après l'exercice 3, il existe une unique matrice  $N \in H_n$  telle que  $M = \exp(N)$ .
  - (i) Démontrer que  $\exp(tN)$  appartient à  $G$  pour tout nombre rationnel  $t$  dont le dénominateur est une puissance de 2 (*indication* : utiliser le fait que l'application  $H \mapsto \sqrt{H}$  de  $H_n^{++}$  dans lui-même stabilise  $G \cap H_n^{++}$  (exercice 5, question 4 (ii))).
  - (ii) En déduire que l'exponentielle induit un homéomorphisme  $\mathfrak{g} \cap H_n \longrightarrow G \cap H_n^{++}$ .
4. Démontrer que  $G$  est homéomorphe à  $(G \cap U(n)) \times \mathbf{R}^d$ , où  $d = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}$ .

**Exercice 8** (Groupes unitaires) — On considère la matrice  $J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$  (avec  $p + q = n$ ) et on pose

$$U(p, q) = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid M^*JM = J\}$$

et

$$\mathfrak{u}(p, q) = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tM) \in U(p, q)\}.$$

1. Expliciter  $U(p, q) \cap U(n)$  et  $\mathfrak{u}(p, q)$ .
2. En déduire un isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels  $\mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{H}_n \simeq M_{p,q}(\mathbf{C})$  puis un homéomorphisme  $U(p, q) \simeq U(p) \times U(q) \times \mathbf{R}^{2pq}$ .
3. En déduire que le groupe  $U(p, q)$  est connexe.

**Exercice 9** (Groupes orthogonaux) — On pose

$$O(p, q) = U(p, q) \cap GL_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{o}(p, q) = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tM) \in O(p, q)\}.$$

- 1.
2. Expliciter  $O(p, q) \cap U(n)$  et  $\mathfrak{o}(p, q)$ .
3. En déduire un isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels  $\mathfrak{o}(p, q) \cap \mathfrak{H}_n \simeq M_{p,q}(\mathbf{R})$  puis un homéomorphisme  $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbf{R}^{pq}$ .
4. Supposons  $p, q \geq 1$  et écrivons les éléments de  $O(p, q)$  sous la forme de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in M_p(\mathbf{R}), D \in M_q(\mathbf{R}), B \in M_{p,q}(\mathbf{R}) \text{ et } C \in M_{q,p}(\mathbf{R}).$$

- (i) Vérifier que l'on a  ${}^tAA = {}^tCC + I_p$  et en déduire que la matrice symétrique  ${}^tAA$  est définie positive, d'où  $\det A \neq 0$ . Démontrer de même que l'on a  $\det D \neq 0$ .
- (ii) On pose  $\sigma(x) = x/|x|$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^*$ . Démontrer que l'application

$$\lambda : O(p, q) \longrightarrow \{\pm 1\}^2, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longmapsto (\sigma(\det A), \sigma(\det D))$$

est continue et surjective, et que ses fibres sont les composantes connexes de  $O(p, q)$ .

- (iii) Démontrer que  $\lambda$  est un homomorphisme de groupes (*indication* : écrire les composantes connexes comme des classes modulo la composante neutre).
- (iv) Démontrer que  $O(p, q)$  est un produit semi-direct de sa composante neutre par  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ .

**Exercice 10** (Groupe symplectique réel) — On considère maintenant la matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$  et on pose

$$Sp_{2n}(\mathbf{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbf{R}) \mid {}^tMJM = J\}, \quad \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tM) \in Sp_{2n}(\mathbf{R})\}.$$

1. Démontrer que l'application

$$U(n) \rightarrow Sp_{2n}(\mathbf{R}), \quad A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

est bien définie et induit un isomorphisme de groupes topologiques  $U(n) \simeq Sp_{2n}(\mathbf{R}) \cap U(2n)$ .

2. Démontrer que  $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbf{R}) \cap \mathfrak{H}_n$  est isomorphe à l'espace vectoriel  $S_n(\mathbf{R}) \oplus S_n(\mathbf{R})$  des couples de matrices réelles symétriques.
3. En déduire que  $Sp_{2n}(\mathbf{R})$  est homéomorphe à  $U(n) \times \mathbf{R}^{n(n-1)}$ , puis que  $Sp_{2n}(\mathbf{R})$  est un sous-groupe connexe de  $SL_{2n}(\mathbf{R})$ .