Université Lyon 1 – 2012-2013
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 8 — Groupes de Lie

Exercice 1 (Exemples) — Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{R}^{2n^2}$ et déterminer son espace tangent en I_n.
2. Soit $\mathrm{U}(n)$ le groupe unitaire d'ordre n et H_n l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes d'ordre n. En utilisant l'application
$$f : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n, \quad \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^*\mathrm{M},$$
démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent en I_n.
3. Soit p et q deux entiers naturels tels que $p + q = n$ et notons $\mathrm{I}_{p,q}$ la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q)$. Soit
$$\mathrm{O}(p, q) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t\mathrm{P}\ \mathrm{I}_{p,q}\ \mathrm{P} = \mathrm{I}_{p,q}\}.$$
En considérant l'application
$$f : \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{S}_n, \quad \mathrm{P} \longmapsto {}^t\mathrm{P}\ \mathrm{I}_{p,q}\ \mathrm{P},$$
démontrer que $\mathrm{O}(p, q)$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer l'espace tangent en I_n. Démontrer que $\mathrm{SO}(p, q) = \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}(n)$ est également une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, ayant le même espace tangent en I_n que $\mathrm{O}(p, q)$.
4. On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Généraliser la question précédente au sous-groupe
$$\mathrm{G} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \mid \mathrm{M}^*\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\}$$
de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, où $\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ est une matrice telle que $\mathrm{J}^2 = \pm\mathrm{I}_n$ (cf. exercice 6 de la fiche 7).

Exercice 2 (Le groupe spécial unitaire) — Il s'agit de démontrer que $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{R}^{2n^2}$.

1. Considérons l'application
$$\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n \oplus \mathbf{C}, \quad \mathrm{X} \longmapsto (\mathrm{X}^* + \mathrm{X}, \mathrm{Tr}(\mathrm{X})).$$
Démontrer que l'image de Φ est le sous-espace vectoriel réel
$$\{(\mathrm{M}, \lambda) \in \mathrm{H}_n \oplus \mathbf{C} \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 2\mathcal{R}e\ (\lambda)\}.$$
2. En déduire que l'application
$$\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times, \quad \mathrm{M} \longmapsto (\mathrm{M}^*\mathrm{M}, \det(\mathrm{M}))$$
n'est pas une submersion au point I_n.
3. Démontrer que l'image de φ est contenue dans le sous-ensemble
$$\mathrm{V} = \{(\mathrm{A}, z) \in \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times \mid \det(\mathrm{A}) = |z|^2\}.$$

4. Démontrer que l'application
$$f : \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (\mathrm{A}, z) \longmapsto |z|^2 - \det(\mathrm{A})$$
est une submersion en tout point de V. En déduire que V est une sous-variété de $\mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times$ et déterminer son espace tangent au point $(\mathrm{I}_n, 1)$.
5. Démontrer que l'application
$$\pi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{H}_n \times \mathbf{R}, \quad (\mathrm{A}, z) \longmapsto (\mathrm{A}, \mathcal{I}m\ (z))$$
réalise un difféomorphisme d'un voisinage de $(\mathrm{I}_n, 1)$ dans V sur un voisinage de $(\mathrm{I}_n, 0)$ dans $\mathrm{H}_n \times \mathbf{R}$.
6. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{SU}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent au point I_n.

Exercice 3 (Deux points de vue sur les algèbres de Lie) — On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, d'élément neutre $1 = \mathrm{I}_n$. On suppose que G est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ [1].

On rappelle que l'*espace tangent* à G en 1 est l'ensemble des vecteurs tangents au point 1 aux courbes $\mathcal{C}^1$ tracées sur G et passant par 1 :
$$\mathrm{T}_1\mathrm{G} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \exists f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathrm{M}_n(\mathbf{K})),\ f(\mathbf{R}) \subset \mathrm{G}, f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \mathrm{X}\}.$$

On pose par ailleurs :
$$\mathfrak{g} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \ \forall t \in \mathbf{R},\ \ \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{G}\}.$$

1. Vérifier que $\mathfrak{g} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{G}$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathrm{G}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \mathrm{X} \neq 0$.
   (i) Démontrer qu'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{X}_m = \log f(\frac{1}{m})$ soit bien défini pour tout $m \geq m_0$.
   (ii) Démontrer que la suite $\left(\frac{\mathrm{X}_m}{||\mathrm{X}_m||}\right)$ converge vers $\mathrm{X}/||\mathrm{X}||$.
   (iii) Soit $t \in \mathbf{R}$. En écrivant
   $$t = a_m||\mathrm{X}_m|| + b_m, \quad a_m \in \mathbf{Z}, \ \ 0 \leqslant b_m < ||\mathrm{X}_m||,$$
   démontrer que l'on a
   $$\lim_{m\to\infty} \exp(a_m\mathrm{X}_m) \in \mathrm{G} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} \exp\left(\frac{b_m\mathrm{X}_m}{||\mathrm{X}_m||}\right) = 1.$$
   (iv) En déduire que X appartient à $\mathfrak{g}$, puis que $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_1\mathrm{G}$.
3. Dans les exemples du cours et des deux exercices précédents, reprendre la recherche de l'espace tangent en l'identité en utilisant l'exponentielle.
4. On désigne par $\exp_\mathrm{G}$ l'application
   $$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{G}, \quad \mathrm{X} \longmapsto \exp(\mathrm{X}),$$
   appelée *exponentielle de* G. Démontrer que :
   (a) $\exp_\mathrm{G}$ réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de 1 dans G ;
   (b) l'image de $\exp_\mathrm{G}$ engendre la composante neutre de G, c'est-à-dire :
   $$\mathrm{G}^\circ = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \exp_\mathrm{G}(\mathfrak{g})^m.$$

1. C'est en fait automatique en vertu d'un théorème d'Élie Cartan

Exercice 4 (Crochet de Lie) — Les hypothèses et notations sont celles de l'exercice précédent. L'identification de $\mathfrak{g}$ à l'espace tangent de G en l'identité montre qu'il s'agit d'un sous-espace espace vectoriel réel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Démontrer que l'action par conjugaison de G sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ stabilise $\mathfrak{g}$.
2. Soit $\mathrm{X},\ \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$. En considérant la conjugaison par $\exp(t\mathrm{X})$, démontrer que le crochet
$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$$
de X et Y appartient à $\mathfrak{g}$.
3. Quelles que soient les matrices $\mathrm{X},\ \mathrm{Y} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, démontrer l'identité
$$\exp(t\mathrm{X})\ \exp(t\mathrm{Y})\ \exp(-t\mathrm{X})\ \exp(-t\mathrm{Y}) = 1 + t^2[\mathrm{X},\mathrm{Y}] + o(t^2).$$
En déduire une autre démonstration de l'assertion précédente.

Exercice 5 (SU(2) et SO(3)) — Soit $\mathfrak{su}_2$ l'espace des matrices de taille 2×2 anti hermitiennes et de trace nulle.

1. Vérifier que le déterminant est une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{su}_2$.
2. Vérifier que l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ induit une action de SU(2) sur $\mathfrak{su}_2$ qui préserve B.
3. En déduire un homomorphisme différentiable $\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ dont l'image est contenue dans SO(3).
4. Démontrer que le noyau de π est $\{\pm \mathrm{I}_2\}$. En déduire que la différentielle de π en I_2 est un isomorphisme.
5. En déduire que l'on a une suite exacte courte
$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(3) \longrightarrow 1.$$

Exercice 6 ($\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SO}_0(3,1)$) — On désigne par $\mathrm{SO}_0(3,1)$ la composante neutre du groupe $\mathrm{SO}(3,1)$.

Soit H_2 le sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes, équipé de la forme quadratique induite par le déterminant.

1. En considérant l'action
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \mathrm{H}_2 \longrightarrow \mathrm{H}_2, \quad (\mathrm{A},\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{AXA}^*$$
construire un homomorphisme injectif et différentiable $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{SO}_0(3,1)$.
2. Démontrer que φ est un isomorphisme.
3. (*Interprétation géométrique*) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des cercles (non réduits à un point) et des droites du plan. On définit une injection ι de $\mathcal{E}$ dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ en associant à un cercle ou une droite C d'équation cartésienne
$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$$
la droite $\iota(\mathrm{C})$ engendrée par (a, b, c, d).
   (i) Déterminer une forme quadratique q de signature $(3, 1)$ telle que l'image de ι soit l'ensemble des droites vectorielles sur lesquelles q est définie positive.
   (ii) On considère l'action par homographies de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, définie par
$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix} \cdot z = \frac{uz + v}{wz + t}.$$

En utilisant l'identité

$$\begin{pmatrix} \overline{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + d,$$

où $z = x + iy \in \mathbf{C}$ et $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, démontrer que l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ induit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{E}$ telle que

$$\iota(g \cdot \mathrm{C}) = \varphi(g) \cdot \iota(\mathrm{C})$$

pour tous $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{E}$.