1. COMPTER LES NOMBRES PREMIERS

1.1. Euclide

THÉORÈME 1.1. (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE) — *Tout nombre entier $n > 1$ est un produit de nombres premiers, et cette écriture est* unique *à l'ordre des facteurs près.*

Cet énoncé est bien connu, mais il est important d'avoir conscience :

(i) que l'existence d'une factorisation est très facile à démontrer (par récurrence);

(ii) que l'unicité, par contre, est plus délicate; il faut en effet faire appel au *lemme d'Euclide* (1), lequel peut se déduire du théorème de Bachet-Bézout;

(iii) que l'unicité est ce qui est le plus utile dans la pratique (par exemple la résolution dans $\mathbf{Z}^3$ de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, que l'on peut trouver dans [**2**] ou encore [**1**]).

Considérons un nombre premier p. La *valuation p-adique* de n, notée $v_p(n)$ est la plus grand exposant de p divisant n :

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid p^k | n\}.$$

C'est un élément de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $v_p(n) = \infty$ ssi $n = 0$, $v_p(1) = 0$ et, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$,

(i) $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$;

(ii) $v_p(m+n) \geqslant \min\{v_p(m), v_p(n)\}$.

EXERCICE 1. — *Démontrer les deux propriétés précédentes.*

La notion de valuation p-adique permet d'énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique sous la forme équivalente suivante : *tout nombre entier $n \geqslant 1$ s'écrit*

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}.$$

Il est important de remarquer ici que, si le produit porte a priori sur l'ensemble des nombres premiers, le facteur $p^{v_p(n)}$ est égal à 1 dès que $p > n$; il s'agit donc en réalité du produit d'un nombre *fini* de termes.

EXERCICE 2. — *Démontrer que le dernier énoncé ci-dessus est équivalent au théorème 1.*

THÉORÈME 1.2. (EUCLIDE) — *L'ensemble des nombres premiers est infini.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre entier $n! + 1 > 1$ admet au moins un facteur premier p. Celui-ci ne peut être égal à aucun des entiers $2, 3, \dots, n$, donc $p > n$. $\square$

REMARQUE 1.3. — On peut déduire de l'argument d'Euclide une majoration (très grossière) du n-ième nombre premier (voir l'exercice 1 de la première feuille de TD).

1. Si p est un nombre premier et a, b sont deux entiers tels que $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$

1.2. Euler

Euler exposa en 1737 une nouvelle preuve de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, reposant sur le théorème fondamental de l'arithmétique et des considérations analytiques simples.

Toute l'analyse requise dans l'approche d'Euler est contenue dans l'énoncé suivant, qui est une version *quantitative* de la comparaison série-intégrale [(2)].

LEMME 1.4. — *Soit $y < x$ deux nombres réels. Pour toute fonction monotone $f : [y,x] \to \mathbf{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(|f(y)|+|f(x)|).$$

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que f est *croissante.*

Si x et y sont entiers, nous pouvons écrire

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(\lfloor t\rfloor)\,\mathrm{d}t + f(x) \leqslant \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$$

et

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(\lceil t\rceil)\,\mathrm{d}t + f(y) \geqslant \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(y),$$

ce qui établit l'estimation voulue.

Le cas général s'en déduit aisément :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \sum_{\lceil y\rceil\leqslant n\leqslant\lfloor x\rfloor} f(n) = \int_{\lceil y\rceil}^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(|f(\lceil y\rceil)|+|f(\lfloor x\rfloor)|),$$

$$\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\lceil y\rceil}^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^{\lceil y\rceil} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est compris entre $2f(y)$ et $2f(x)$ et

$$f(y) \leqslant f(\lceil y\rceil) \leqslant f(\lfloor x\rfloor) \leqslant f(x),$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbf{Z},\ y\leqslant n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(|f(y)|+|f(x)|).$$

□

REMARQUE 1.5. — Bien que très élémentaire, cette estimation est fort utile et nous l'utiliserons à de nombreuses reprises. Nous en verrons également deux raffinements : la formule d'Abel et la formule d'Euler-Maclaurin.

Pour tout nombre réel $s > 1$,

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_M^N t^{-s}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}) = \frac{M^{1-s}-N^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(M^{-s}+N^{-s}),$$

2. Il faut quand même ajouter l'estimation $\log(1+x) = x + \mathrm{O}(x^2)$ au voisinage de 0, sous la forme : il existe un nombre réel $A > 0$ tel que

$$|\log(1+x) - x| \leqslant Ax^2$$

pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$.

donc la série $\zeta(s)=\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ est convergente (critère de Cauchy) et

$$1<\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(1).$$

L'observation capitale d'Euler est que le théorème fondamental de l'arithmétique permet d'exprimer $\zeta(s)$ à l'aide des nombres premiers. Pour comprendre cela, introduisons pour tout nombre premier p et tout $s>1$ la série

$$\zeta_p(s)=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{p^{ks}}$$

restreinte aux entiers qui sont des puissances de p. Il s'agit bien entendu d'une série géométrique, de somme

$$\zeta_p(s)=\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Le produit

$$\zeta_2(s)\zeta_3(s)=\sum_{m_2,m_3\geqslant 0}\frac{1}{(2^{m_2}3^{m_3})^s}$$

est la série zeta restreinte aux entiers qui ne sont divisibles que par 2 ou par 3. Plus généralement, pour tout entier $N\geqslant 2$,

$$\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s)=\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n\in E_N}\frac{1}{n^s},$$

où E_N désigne l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles que par des nombres premiers $p\leqslant N$. Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit que l'ensemble E_N contient *tous les nombres* $n\leqslant N$ (puisqu'ils sont le produits de nombres premiers nécessairement inférieurs à N), et que chacun d'eux ne s'obtient qu'une seule fois, c'est-à-dire pour un seul terme du développement du produit de gauche (par l'unicité). Nous pouvons donc écrire

$$\left|\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s)-\sum_{n\leqslant N}\frac{1}{n^s}\right|=\sum_{n\in E_N\text{ et }n>N}\frac{1}{n^s}\leqslant\sum_{n>N}\frac{1}{n^s}.$$

Le membre de droite (reste d'une série convergente...) est majoré par $\frac{N^{1-s}}{s-1}+\mathrm{O}(N^{-s})$, donc il tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

Nous venons ainsi de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1.6 (FORMULE DU PRODUIT — *Pour tout réel $s>1$, la suite des produits finis $\prod_{p\leqslant N}\zeta_p(s)$ est convergente, de limite $\zeta(s)$. Autrement dit,*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)=\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

En passant aux logarithmes, l'identité d'Euler se réécrit [3], pour $s \in]1,\infty[$:

$$\begin{aligned}
\log \zeta(s) &= \sum_{p\in\mathscr{P}} -\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \\
&= \sum_{p\in\mathscr{P}} \left(\frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{2s}}\right)\right) \\
&= \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s}+\mathrm{O}\left(\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^{2s}}\right) \\
&= \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s}+\mathrm{O}(1).
\end{aligned}$$

en majorant la série des p^{-2s} par la somme de la série (de Riemann) convergente des n^{-2}. Nous en déduisons :

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s} = \log\left(\frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(1)\right) = \log\frac{1}{s-1}+\log(1+\mathrm{O}(s-1)) = -\log(s-1)+\mathrm{o}(1)$$

lorsque s tend vers 1.

THÉORÈME 1.7. (EULER) — *La série*

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p}$$

est divergente.

Démonstration. Pour tout $s > 1$,

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p} \geqslant \sum_{p\in\mathscr{P}}\frac{1}{p^s}$$

dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. L'estimation asymptotique du membre de droite quand s tend vers 1 que l'on vient d'obtenir fournit la conclusion voulue. □

REMARQUE 1.8. — On peut déduire de ce théorème l'estimation $\pi(x) = o(x)$ quand x tend vers l'infini, c'est-à-dire que la proportion des nombres premiers parmi les nombres entiers $\leqslant x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. De manière imagée, la probabilité qu'un nombre entier choisi au hasard soit premier est nulle (voir TD1, exercice 3).

En reprenant les arguments précédents, nous pouvons obtenir une version quantitative de ce théorème.

PROPOSITION 1.9. — *Il existe un nombre réel $C > 0$ tel que*

$$\log\log x - \log 2 \leqslant \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} \leqslant e\log\log x + C$$

pour tout réel $x > 1$.

---

3. L'interversion de la somme et du $\mathrm{O}(\cdot)$ est licite car la constante implicite ne dépend ni de p ni de s, cf. note précédente

Démonstration. En écrivant chaque entier $n \geqslant 1$ sous la forme $n = qm^2$, où q est un entier sans facteur carré [4], il vient

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \leqslant \left(\sum_{q \text{ sans facteur carré},\ q\leqslant x} \frac{1}{q} \right) \left(\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^2} \right).$$

En utilisant la majoration élémentaire

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^2} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 2$$

et en observant que l'on a

$$\sum_{q \text{ sans facteur carré},\ q\leqslant x} \frac{1}{q} \leqslant \prod_{p\in\mathscr{P},\ p\leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{p\in\mathscr{P},\ \leqslant x} \frac{1}{p} \right),$$

il vient

$$\sum_{p\in\mathscr{P},\ p\leqslant x} \frac{1}{p} \geqslant \log\left(\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} \right) - \log 2.$$

La minoration voulue en découle puisque

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} \geqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log x.$$

La majoration, quant à elle, peut s'obtenir grâce à une utilisation astucieuse de l'estimation asymptotique

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + \mathrm{o}(1)$$

au voisinage de 1^+. L'idée, connue sous le nom d'« astuce de Rankin » (*Rankin's trick*) est d'écrire $s = 1 + \varepsilon(x)$, où ε est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et qui vérifie la condition

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbf{1}_{n\leqslant x} \leqslant \frac{C}{n^{1+\varepsilon(x)}}$$

pour tous $x > 0$ et $n \geqslant 1$, où C est une constante. On peut choisir [5] $\varepsilon(x) = \frac{1}{\log x}$ et $C = e$ (exercice !), d'où

$$\sum_{p\in\mathscr{P},\ p\leqslant x} \frac{1}{p} \leqslant e \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{1+\frac{1}{\log x}}} = e \log\log x + \mathrm{O}(1).$$

□

REMARQUE 1.10. — Cet encadrement détermine l'ordre de grandeur de $\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p}$. Nous en verrons plus loin un développement asymptotique, de terme dominant $\log\log x$.

4. Cette écriture est unique : pour tout nombre premier p, $v_p(m)$ et $v_p(q)$ sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de $v_p(n)$ par 2.

5. La condition équivaut à $\varepsilon(x)\log(n) \leqslant C$ pour tous n et x tels que $n \leqslant x$.

1.3. Tchébychev

En 1850, le mathématicien russe Pafnouti Tchébychev démontra que la fonction de comptage des nombres premiers a bien l'ordre de grandeur attendu.

THÉORÈME 1.11. — *Il existe des nombres réels* $0 < c < C$ *tels que, pour tout* x *assez grand,*

$$c\,\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant C\,\frac{x}{\log(x)}.$$

On peut déduire de ce théorème l'existence de nombres premiers dans certains intervalles. En effet, si $a < b$ sont deux nombres réels (suffisamment grands) tels que

$$C\frac{a}{\log a} < c\frac{b}{\log b},$$

alors $\pi(a) < \pi(b)$ et l'intervalle $]a, b]$ contient donc un nombre premier. Notre démonstration va établir un tel encadrement *asymptotique* (c'est-à-dire pour x assez grand) pour tout choix de constantes tel que $c < \log 2 < 2\log 2 < C$.

COROLLAIRE 1.12. — *Soit* ε *un nombre réel. Il existe un entier* $n_0(\varepsilon)$ *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, *l'intervalle* $[n, (2+\varepsilon)n]$ *contienne un nombre premier*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ tel que

$$\frac{2\log 2 + \delta}{\log 2 - \delta} < 2 + \varepsilon$$

(le membre de gauche décroît vers 2 lorsque δ tend vers 0) et posons $c = \log 2 - \delta$, $C = 2\log 2 + \delta$. Le quotient

$$\frac{(2+\varepsilon)n}{\log((2+\varepsilon)n)} \cdot \frac{\log n}{n} = (2+\varepsilon)\,\frac{\log n}{\log n + \log(2+\varepsilon)}$$

croît vers $2+\varepsilon$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que cette expression soit supérieure à C/c pour $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Le théorème précédent garantit alors l'existence d'un nombre premier dans l'intervalle $[n, (2+\varepsilon)n]$. □

REMARQUE 1.13. — En raffinant son approche, Tchébychev a prouvé que $c = 0{,}9$ et $C = 1{,}1$ conviennent, et que l'encadrement obtenu vaut pour tout $x \geqslant 5$. Comme

$$\frac{2n}{\log(2n)} \cdot \frac{\log n}{n} = 2\left(1 + \frac{\log 2}{\log n}\right)^{-1} \geqslant \frac{4}{3} > \frac{11}{9}$$

pour tout $n \geqslant 4$ (cette expression croît avec n), il a pu en déduire la première démonstration du *postulat de Bertrand*, affirmant l'existence d'un nombre premier dans tout intervalle $[n, 2n]$ (voir l'exercice 6 pour une autre preuve).

La démonstration de Tchébychev est *élémentaire*, au sens où elle n'utilise que le théorème fondamental de l'arithmétique et des estimations relevant de l'analyse réelle asymptotique, et non pas l'analyse complexe. Elle n'en demeure pas moins ingénieuse, l'idée principale consistant à comparer la factorisation de $n!$ à son ordre de grandeur. Nous allons ici suivre la présentation particulièrement élégante qu'en donnent G. Tenenbaum et M. Mendès-France dans [**3**].

Il est très facile d'estimer le comportement asymptotique de $\log(n!)$. En effet, la comparaison quantitative série-intégrale de la section précédente fournit aisément une version affaiblie de la formule de Stirling, suffisante pour la démonstration de notre théorème : en l'appliquant à $f(x) = \log x$, il vient en effet

$$\log(n!) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \log m = \int_1^n \log t \, \mathrm{d}t + \mathrm{O}(\log n) = n \log n - n + \mathrm{O}(\log n),$$

la dernière égalité s'obtenant en intégrant par parties.

REMARQUE 1.14. — Rappelons que la formule de Stirling usuelle est le développement asymptotique

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + o(1).$$

Nous en verrons plus loin deux démonstrations différentes.

Passons maintenant à l'étude arithmétique de $\log(n!)$. En vertu du théorème fondamental de l'arithmétique, nous pouvons écrire

$$\log(n!) = \sum_{p|n} v_p(n!) \log p = \sum_{p \leqslant n} v_p(n!) \log p$$

puisque les diviseurs premiers de $n!$ sont précisément les nombres premiers inférieurs à n.

LEMME 1.15. — *Pour tout nombre entier naturel n et tout nombre premier p,*

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$$

Démonstration — Si l'on factorise chaque entier $m \leqslant n$ sous la forme $m = p^{v_p(m)} m'$, avec $p \nmid m'$, alors le facteur p^α apparaît dans

$$n! = \prod_{1 \leqslant m \leqslant n} m$$

pour chaque entier m tel que $p^\alpha | m$ et $p^{\alpha+1} \nmid m$, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor$ fois (le nombre de multiples de p^α moins le nombre de multiples de $p^{\alpha+1}$). On a donc

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor \right) \alpha = \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

□

Nous en déduisons

$$\log(n!) = \sum_{p \leqslant n} \sum_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \log p = \sum_{p^\alpha \leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \log p = \sum_{d \leqslant n} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor,$$

où Λ est la *fonction de von Mangolt*, définie sur $\mathbf{N}^*$ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n \text{ est une puissance strictement positive de } p; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite de la démonstration va porter sur la fonction ψ, définie pour tout réel $x > 0$ par

$$\psi(x) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d).$$

Il est par ailleurs commode de poser

$$T(x) = \log(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

La seconde idée de Tchébychev consiste à considérer la quantité

$$T(x) - 2T(x/2),$$

ce que l'on peut essayer de motiver en observant que l'on a

$$T(2n) - 2T(n) = \log((2n)!) - \log((n!)^2) = \log\binom{2n}{n}.$$

La formule de Stirling (faible) fournit l'estimation asymptotique $T(x) = x\log x - x + \mathrm{O}(\log x)$, donc

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = x\log x - x - x\log\frac{x}{2} + x + \mathrm{O}(\log x) = (\log 2)x + \mathrm{O}(\log x)$$

quand x tend vers $+\infty$.

D'un autre côté, écrivons

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{d\leqslant x}\left(\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{x}{2d}\right\rfloor\right)\Lambda(d)$$

(en observant que $\lfloor x/2d\rfloor = 0$ si $d > x/2$). La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \lfloor x\rfloor - 2\lfloor x/2\rfloor$ est 2-périodique et elle vérifie $f(x) = \lfloor x\rfloor \leqslant 1$ pour $x \in [0,2[$, donc $f(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Nous en déduisons déjà une minoration asymptotique de la fonction ψ :

$$(\log 2)x + \mathrm{O}(\log x) = T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \psi(x).$$

REMARQUE 1.16. — Le fait que $\psi(x)$ tende vers $+\infty$ avec x implique évidemment l'infinitude de $\mathscr{P}$. Nous venons donc d'en fournir une nouvelle démonstration.

Si l'on revient à la formule

$$T(x) = \sum_{d\leqslant x}\Lambda(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$$

définissant T, on observe que $\lfloor x/d\rfloor = 1$ pour $d/2 < x \leqslant x$. On en déduit

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{d}\right) \geqslant \sum_{\frac{x}{2}<d\leqslant x}\Lambda(d) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

et donc

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant (\log 2)x + \mathrm{O}(\log x).$$

Il ne reste qu'à sommer les inégalités

$$\psi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \leqslant (\log 2)\frac{x}{2^k} + \mathrm{O}(\log x - k\log 2)$$

avec $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor\frac{\log x}{\log 2}\right\rfloor$ pour obtenir la majoration

$$\psi(x) \leqslant (2\log 2)x + \mathrm{O}((\log x)^2).$$

Nous venons donc de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1.17. (TCHÉBYTCHEV POUR LA FONCTION ψ) —

$$\log 2 \leqslant \liminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} \leqslant 2\log 2.$$

Il nous reste à voir comment en déduire le théorème initial, ce qui se fait aisément en comparant les fonctions ψ et π. Il est commode pour cela d'introduire la fonction θ définie pour tout réel $x > 0$ par

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p.$$

Notons que l'on a :

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \sum_{\alpha \geqslant 1,\ p^\alpha \leqslant x} \log p = \sum_{\alpha \geqslant 1} \sum_{p \leqslant x,\ p^\alpha \leqslant x} \log p = \sum_{\alpha \geqslant 1} \theta(x^{1/\alpha}) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \dots .$$

La somme de droite ne contient que $\left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$ termes non nuls puisque $\theta(y) = 0$ pour tout $y < 2$

PROPOSITION 1.18. — *Pour tout réel $x > 0$,*

(i)

$$\frac{\theta(x)}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{\theta(x)}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{(\log x)^2}.$$

(ii)

$$\theta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \theta(x) + \sqrt{x}(\log x)^2.$$

Démonstration. Les minorations

$$\theta(x) \leqslant \pi(x)\log x \quad \text{et} \quad \theta(x) \leqslant \psi(x)$$

sont triviales. En écrivant

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \ldots + \theta(\sqrt[m]{x})$$

avec $m = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$, il vient immédiatement

$$\psi(x) \leqslant \theta(x) + \theta(\sqrt{x})\frac{\log x}{\log 2} \leqslant \theta(x) + \sqrt{x}\log(\sqrt{x})\frac{\log x}{\log 2} \leqslant \theta(x) + \sqrt{x}(\log x)^2.$$

Il reste à établir la majoration du point (i). Pour tous réels $0 < y < x$,

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y < p \leqslant x} 1 \leqslant \sum_{y < p \leqslant x} \frac{\log p}{\log y} = \frac{\theta(x) - \theta(y)}{\log y} \leqslant \frac{\theta(x)}{\log y},$$

donc

$$\pi(x) \leqslant \frac{\theta(x)}{\log y} + \pi(y) \leqslant \frac{\theta(x)}{\log y} + y.$$

En posant $y = \frac{x}{(\log x)^2}$, il vient au final

$$\pi(x) \leqslant \frac{\theta(x)}{\log x + \log\log x} + \frac{x}{\log x}.$$

□

REMARQUE 1.19. — Le choix de $y = \frac{x}{(\log x)^2}$ à la fin de la démonstration peut sembler étonnant. Il serait plus spontanément tenté de prendre $y = \sqrt{x}$, ce qui conduirait à la majoration

$$\pi(x) \leqslant 2\,\frac{\theta(x)}{\log x} + \sqrt{x}.$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \in]0,1[$, on obtient

$$\pi(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\frac{\theta(x)}{\log x} + x^\alpha$$

en posant $y = x^\alpha$. Pour ne pas obtenir de facteur parasite devant $\frac{\theta(x)}{\log x}$, il faut donc choisir $y < x$ dominant toutes les puissances x^α avec $\alpha \in]0,1[$. Cela suggère le choix $y = x/(\log x)^k$, en excluant $k = 1$ puisque $\pi(x)$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{x}{\log x}$.

(*Fin de la preuve du théorème 10*)

On a

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x}, \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

en vertu du point (ii) de la proposition précédente et

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \liminf_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x}, \quad \limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x}$$

d'après le point (ii). Le théorème découle alors directement du théorème 17, au moins pour x assez grand. □

La proposition précédente permet de reformuler utilement le théorème des nombres premiers.

COROLLAIRE 1.20. — *Les trois assertions sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$:*

(i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$

(ii) $\theta(x) \sim x$

(iii) $\psi(x) \sim x$

2. FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Dans tout ce qui suit, on pose $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 2.1 — *Une* fonction arithmétique *est une application* $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$. *Les fonctions arithmétiques forment un* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel pour l'addition usuelle, noté* $\mathscr{A}$.

Si toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs complexes peut être vue comme une fonction arithmétique, seules certaines, ayant le plus souvent un contenu arithmétique, s'avèrent intéressantes. Parmi ces dernières, citons dès maintenant :

(a) la fonction constante égale à 1, notée $\mathbf{1}$;

(b) la fonction « identité » id, définie par $\mathrm{id}(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$;

(c) la fonction « de Dirac » en 1, définie par

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$;

(d) la fonction « nombre de diviseurs » , usuellement notée d ou τ, et définie par

$$d(n) = \sum_{d \mid n} 1$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$;

(e) la fonction μ de Möbius, définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(f) la fonction indicatrice d'Euler φ, définie par

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(h,n)=1} 1$$

(g) la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers, notée $\mathbf{1}_{\mathscr{P}}$;

(h) la fonction Λ de von Mangolt, définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\alpha, \text{ avec } p \text{ premier et } \alpha \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉFINITION 2.2 — *La* fonction sommatoire *d'une fonction arithmétique* f *est la fonction* M_f *définie sur* $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ *par*

$$M_f(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n).$$

Le problème de déterminer le comportement asymptotique de M_f est une vaste généralisation du théorème des nombres premiers (cas $f = \mathbf{1}_{\mathscr{P}}$). Si l'on ne peut rien dire à ce niveau de généralité, la démonstration du théorème de Tchébychev a mis en évidence l'importance des fonctions arithmétiques $\mathbf{1}_{\mathscr{P}} \log$ (de fonction sommatoire θ) et Λ (de fonction sommatoire ψ).

Avant d'aborder l'étude asymptotique de M_f, nous allons mettre en évidence une structure algébrique spécifique sur $\mathscr{A}$, sous-jacente à de nombreuses identités (plus ou moins) bien connues.

2.1. Convolution de Dirichlet

Les fonctions arithmétiques peuvent être multipliées de façon habituelle. Il s'avère cependant que l'on peut définir sur $\mathscr{A}$ une autre structure multiplicative, plus intéressante, qui reflète les propriétés de divisibilité des nombres entiers.

Étant donné deux fonctions arithmétiques f, g, on définit leur *produit de Dirichlet*, noté $f * g$, par

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d,d'\ ;\ dd'=n} f(d) g(d') \tag{1}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Observer que la première somme porte sur tous les diviseurs de n dans $\mathbf{N}^*$, la seconde sur tous les couples (d, d') d'éléments de $\mathbf{N}^*$ tels que $dd' = n$; on passe bien entendu de la première à la seconde en posant $d' = \frac{n}{d}$.

PROPOSITION 2.3 — *Muni de l'addition $+$ et de la multiplication $*$, l'ensemble $\mathscr{A}$ est une* $\mathbf{C}$-*algèbre associative, commutative, d'élément neutre δ_1. En outre, le groupe $\mathscr{A}^\times$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ est formé des f telles que $f(1) \neq 0$.*

Pour $f \in \mathscr{A}$ et $k \geqslant 1$, on pose

$$f^{(k)} = f * \ldots * f$$

(k copies). Si $f \in \mathscr{A}^\times$, on désigne par $f^{(-1)}$ son inverse au sens du produit de Dirichlet.

Démonstration. L'associativité découle de l'identité

$$((f*g)*h)(n) = \sum_{d,c\ ;\ dc=n} (f*g)(d)h(c) = \sum_{a,b,c\ ;\ abc=n} (f(a)g(b))h(c)$$

et de l'associativité de la multiplication dans $\mathbf{C}$.

La commutativité se déduit du fait que la seconde somme dans (1) est symétrique en f et g.

L'élément neutre multiplicatif de $\mathscr{A}$ est la fonction de Dirac δ_1 puisque

$$f * \delta_1(n) = \sum_{d|n} f(n/d)\delta_1(d) = f(n/1) = f(n)$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{A}$.

Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible, d'inverse g, alors

$$1 = \delta_1(1) = f * g(1) = f(1)g(1),$$

donc $f(1) \neq 0$. Réciproquement, si $f \in \mathscr{A}$ est une fonction telle que $f(1) \neq 0$, alors nous pouvons facilement définir une fonction $g \in \mathscr{A}$ telle que $f * g = \delta_1$. On raisonne pour cela par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$:

— on pose $g(1) = 1/f(1)$;

— si $n > 1$ et que l'on a défini $g(m)$ pour tout entier $m < n$, alors on pose

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n,\ d>1} f(d) g(n/d)$$

en remarquant que l'on a $n/d < n$ si $d > 1$.

La relation $f * g = \delta_1$, c'est-à-dire

$$\sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

est vérifiée par construction. □

DÉFINITION 2.4 — *Une fonction arithmétique f est dite* multiplicative *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $f(1) = 1$*;*

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ *pour tous entiers* $m, n \in \mathbf{N}^*$ *premiers entre eux.*

Le théorème fondamental de l'arithmétique garantit qu'une fonction arithmétique multiplicative f est entièrement déterminée par ses valeurs sur les entiers de la forme p^α, avec p premier et $\alpha \geqslant 1$: pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$f(n) = f\left(\prod_p p^{v_p(n)}\right) = \prod_p f\left(p^{v_p(n)}\right).$$

PROPOSITION 2.5 — *Les fonctions arithmétiques multiplicatives forment un sous-groupe de* $\mathscr{A}^\times$.

Démonstration. Le point-clef est l'observation suivante : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors l'application $(d, d') \mapsto dd'$ réalise une bijection entre l'ensemble des couples (d, d'), formés d'un diviseur d de m et d'un diviseur d' de n, et l'ensemble des diviseurs de mn. La bijection réciproque est fournie par l'application

$$\delta \mapsto (\mathrm{pgcd}(\delta, m), \mathrm{pgcd}(\delta, n)).$$

Il est maintenant facile de démontrer notre proposition. Si f et g sont multiplicatives, alors, pour tous entiers m, n premiers entre eux,

$$\begin{aligned} (f * g)(mn) &= \sum_{\delta|mn} f(\delta)g(mn/\delta) \\ &= \sum_{d|m, d'|n} f(dd')g\left(\frac{m}{d}\frac{n}{d'}\right) \\ &= \sum_{d|n, d'|m} f(d)f(d')g(m/d)g(n/d') \\ &= \left(\sum_{d|m} f(d)g(m/d)\right)\left(\sum_{d'|n} f(d')g(n/d')\right) \\ &= (f * g)(m)(f * g)(n). \end{aligned}$$

Toute fonction f multiplicative est inversible puisque $f(1) = 1$. Pour démontrer que son inverse $f^{(-1)}$ est multiplicative, on considère l'identité

$$f^{(-1)}(mn) = f^{-1}(mn)f(1) = -\sum_{\delta|mn,\ \delta>1} f^{-1}(mn/\delta)f(\delta) = -\sum_{d|m, d'|n,\ dd'>1} f^{(-1)}\left(\frac{m}{d}\frac{n}{d'}\right)f(dd')$$

pour tous entiers m, n premiers entre eux et l'on raisonne par récurrence sur $m + n$. Les cas $m = 1$ ou $n = 1$ sont triviaux, donc nous pouvons supposer $m, n > 1$. On a $f^{(-1)}(1) = f(1)^{-1} = 1$ et $f^{(-1)}\left(\frac{m}{d}\frac{n}{d'}\right) = f^{(-1)}(m/d)f^{(-1)}(n/d')$ si $dd' > 1$ puisqu'alors $\frac{m}{d} + \frac{n}{d'} < m + n$. Nous pouvons donc réécrire le membre de droite sous la forme

$$-\left(\sum_{d|m} f^{(-1)}\left(\frac{m}{d}\right) f(d)\right)\left(\sum_{d'|n} f^{(-1)}\left(\frac{n}{d'}\right) f(d')\right) + f^{(-1)}(m)f(1)f^{(-1)}(n)f(1) = f^{(-1)}(m)f^{(-1)}(n)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

EXEMPLES 2.6 — L'identité

$$1 * 1(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d,d'\ ;\ dd'=n} 1$$

montre que $1*1$ est la fonction « nombre de diviseurs », notée d ; il s'agit donc d'une fonction multiplicative. On a

$$d(p^\alpha) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \alpha} 1 = \alpha + 1$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 1$, donc

$$d(n) = \prod_{p|n} (v_p(n) + 1)$$

par multiplicativité.

Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$1^{(k)}(n) = \sum_{d_1,\ldots,d_k\ ;\ d_1\cdots d_k = n} 1$$

est le nombre de k-uplets d'entiers $(d_1, \ldots, d_k)$ tels que $d_1 \cdots d_k = n$.

On a par ailleurs

$$1 * \mathrm{id}(n) = \sum_{d|n} d,$$

donc la fonction arithmétique $\sigma = 1 * \mathrm{id}$, associant à tout entier n la somme de ses diviseurs, est également multiplicative.

2.2. La fonction de Möbius

Considérons l'inverse de convolution de la fonction 1. Il s'agit d'une fonction multiplicative, qui vérifie par hypothèse l'identité

$$\sum_{d|n} 1^{(-1)}(d) = \delta_1(n)$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$. On en déduit :

$$1^{(-1)}(1) = 1,\quad 1^{(-1)}(p) = -1 \quad \text{et} \quad 1^{(-1)}(p^\alpha) = 0$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 2$. Par multiplicativité, on a donc

$$1^{(-1)}(n) = \prod_p 1^{(-1)}\left(p^{v_p(n)}\right) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$1^{(-1)} = \mu.$$

PROPOSITION 2.7 — *La fonction de Möbius est l'inverse de convolution de la fonction constante* 1. *De manière équivalente,*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PROPOSITION 2. (FORMULE D'INVERSION DE MÖBIUS) — *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d). \tag{3}$$

Démonstration. La première identité équivaut à $g = f * 1$, la seconde à $f = g * \mu$. Elles sont donc équivalentes puisque $1 * \mu = \delta_1$. □

2.3. La fonction indicatrice d'Euler

Par définition,

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} 1 = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \delta_1(\mathrm{pgcd}(m,n)).$$

En utilisant l'identité $\delta_1 = 1 * \mu$, il vient alors

$$\varphi(n) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} 1 * \mu(\mathrm{pgcd}(m,n)) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{d|\mathrm{pgcd}(m,n)} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \mathrm{id} * \mu.$$

En observant que l'on a

$$\varphi(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) \frac{p^\alpha}{d} = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

pour tout nombre premier p et tout $\alpha \geqslant 1$, nous retrouvons immédiatement les propriétés bien connues de φ.

PROPOSITION 2.8 — *La fonction indicatrice d'Euler est multiplicative. Elle vérifie :*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

et

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Séries de Dirichlet

Les séries de Dirichlet apparaissent naturellement comme les *séries génératrices* des fonctions arithmétiques : à $f \in \mathscr{A}$ est associée la série de fonctions de la variable complexe s définie par

$$L(f,s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

La motivation pour introduire les fonctions n^s plutôt que s^n (qui conduiraient à des séries entières) est la propriété de *multiplicativité* évidente

$$\frac{1}{(mn)^s} = \frac{1}{m^s}\cdot\frac{1}{n^s}$$

pour tous $m,n \in \mathbf{N}^*$.

Nous allons commencer par une étude générale des séries de Dirichlet, puis nous considérerons plus spécifiquement le cas des séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques multiplicatives.

3.1. Abscisses de convergence

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes.

Proposition 3.1 — *Si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ converge en un point $s_0 \in \mathbf{C}$, alors elle converge uniformément sur tout cône $s_0 + \left(\mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\vartheta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\vartheta}\right)$ avec $\vartheta \in [0,\pi/2[$.*

Démonstration. Le changement de variable $\sum a_n n^{-s} = \sum a_n n^{-s_0} n^{-(s-s_0)}$ permet de se ramener au cas $s_0 = 0$; l'hypothèse est alors la convergence de la série $\sum a_n$.

Notons $A_{M,N}$ la somme partielle $\sum_{n=M}^{N} a_n$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M_0 \geqslant 1$ tel que, pour tous $N \geqslant M > M_0$,

$$|A_{M,N}| \leqslant \varepsilon.$$

En vertu de la transformation d'Abel

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s} &= \sum_{n=M+1}^{N}\frac{A_{M,n}-A_{M,n-1}}{n^s} + \frac{A_{M,M}}{M^s}\\ &= \sum_{n=M}^{N} A_{M,n}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \frac{A_{M,N}}{(N+1)^s},\end{aligned}$$

il vient

$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leqslant \varepsilon\left(\sum_{n=M}^{N}\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| + \frac{1}{|(N+1)^s|}\right)$$

pour tous $N \geqslant M > M_0$. Écrivons $s = a+ib$ avec $a,b \in \mathbf{R}$. En observant que l'on a

$$|s| \leqslant ka \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{\cos\vartheta}$$

pour tout s dans le cône $\mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\vartheta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\vartheta}$ et $|t^{s+1}| = t^{a+1}$ pour tout $t > 0$, on obtient

$$\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right| = \left|\int_n^{n+1}\frac{s}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant k\int_n^{n+1}\frac{a}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t = k\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a}\right)$$

et donc
$$\left|\sum_{n=M}^{N}\frac{a_n}{n^s}\right| \leqslant \varepsilon k\left(\sum_{n=M}^{N}\left(\frac{1}{n^a}-\frac{1}{(n+1)^a}\right)+\frac{1}{(N+1)^a}\right)=\frac{\varepsilon k}{M^a}\leqslant k\varepsilon.$$
La conclusion en découle en vertu du critère de Cauchy uniforme. □

Corollaire 3.2 — *Il existe $\sigma_c \in \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ tel que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ soit divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) < \sigma_c$ et convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_c$.*

Démonstration. Il découle de la proposition précédente que l'ensemble
$$I = \left\{ s \in \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\} \;\middle|\; \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \text{ converge}\right\}$$
est un intervalle contenant $+\infty$. On pose alors :
$$\sigma_c = \inf I.$$
□

L'élément σ_c de $\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ que l'on vient d'associer à la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ est son *abscisse de convergence.*

EXEMPLE 3.3 — Il est facile de voir que tous les cas sont possibles.

— Si $a_n = \frac{1}{n!}$, alors
$$\frac{a_{n+1}(n+1)^{-s}}{a_n n^{-s}} = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}$$
tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout $s\in\mathbf{C}$, donc $\sigma_c = -\infty$.

— Si $a_n = n!$, alors $\left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ tend vers $+\infty$ avec n pour tout $s\in\mathbf{C}$, donc $\sigma_c = +\infty$.

— Si $a_n = 1$, alors $\sigma_c = 1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$ diverge au point $s = \sigma_c$.

— Si $a_n = \frac{1}{(\log n)^2}$, alors $\sigma_c = 1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(\log n)^2 n^s}$ converge au point $s=\sigma_c$.

COROLLAIRE 3.4 — *Une série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ d'abscisse converge σ_c converge sur le demi-plan $\mathscr{H}_{\sigma_c} = \{s\in\mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > \sigma_c\}$, uniformément sur tout demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s)\geqslant\sigma>\sigma_c$. Sa somme f est une fonction holomorphe sur $\mathscr{H}_{\sigma_c}$ dont les dérivées itérées s'obtiennent en dérivant la série initiale terme à terme :*
$$f^{(k)}(s) = (-1)^k\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n(\log n)^k}{n^s}$$
pour tout $k\in\mathbf{N}$ et tout $s\in\mathscr{H}_0$.

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème de Weierstrass sur la préservation de l'holomorphie par limite uniforme. □

REMARQUE 3.5 — Si l'on se borne à ne considérer que des valeurs réelles de la variable s, alors on peut établir aisément que la somme $f(s)$ de la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s}$ est une fonction indéfiniment dérivable sur le demi-plan $s>\sigma_c$. Il suffit bien entendu de considérer la cas $\sigma_c<+\infty$ et, en raisonnant par récurrence, de prouver que f est dérivable sur $]\sigma_c,+\infty[$, de dérivée f' vérifiant
$$f'(s) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n\log n}{n^s}$$

pour tout $s > \sigma_c$. Étant donné $s > s_1 > \sigma_c$ dans $\mathbf{R}$, nous pouvons écrire

$$\frac{a_n \log n}{n^s} = \frac{\log n}{n^{s-s_1}} \cdot \frac{a_n}{n^{s_1}}. \tag{4}$$

La série des $a_n n^{-s_1}$ est convergente par hypothèse (puisque $s_1 > \sigma_c$) tandis que la suite de terme général $\frac{\log n}{n^{s-s_1}}$ tend vers 0 et est décroissante à partir d'un certain rang puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \frac{\log u}{u^a} = \frac{1 - a \log u}{u^{a+1}} < 0$$

dès que $u > e^{1/a}$. On en déduit la convergence de la série de terme général (1) (par transformation d'Abel) pour tout $s > \sigma_c$. Cette convergence est en outre uniforme sur tout intervalle $[s_1, +\infty[$ avec $s_1 > \sigma_c$ en vertu de la proposition, donc f est dérivable sur $]\sigma_c, +\infty[$ et $f'(s)$ est la somme de la série des $a_n(\log n)n^{-s}$.

EXEMPLE 3.6 — Considérons la série de Dirichlet

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

qui est convergente pour $s > 0$ et divergente pour $s \leqslant 0$; son abscisse de convergence est donc $\sigma_c = 0$. Sa somme f est une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$. Pour $s \in \mathbf{C}$ avec $\mathfrak{Re}(s) > 1$, la convergence absolue des séries permet de permuter les termes et donc d'écrire

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots - \frac{2}{2^s} - \frac{2}{4^s} - \frac{2}{6^s} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \\
&= f(s).
\end{aligned}$$

En observant que l'on a

$$1 - \frac{2}{2^s} = 1 - e^{(1-s)\log 2} = (s-1)\log 2 + o(s-1)$$

au voisinage de 1, l'identité

$$(s-1)\zeta(s) = (s-1)\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)^{-1} f(s)$$

fait apparaître au membre de droite une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$, de valeur

$$\frac{1}{\log 2} f(1) = \frac{1}{\log 2} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1$$

en $s = 1$. Nous venons ainsi de prouver que la fonction ζ possède un prolongement méromorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ ayant un unique pôle en $s = 1$; il s'agit d'un pôle simple, de résidu 1.

Partant d'une série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$, nous pouvons considérer la série de Dirichlet $g(s) = \sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-s}$ et lui appliquer ce qui précède.

DÉFINITION 3.7 — L'abscisse de convergence absolue *d'une série de Dirichlet* $\sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$ *est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet* $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-s}$. *C'est l'unique élément de* $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ *tel que la série* $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| n^{-s}$ *soit convergente sur* $]\sigma_a, +\infty[$ *et divergente sur* $]-\infty, \sigma_a[$.

LEMME 3.8 — *L'abscisse de convergence σ_c et l'abscisse de convergence absolue σ_a d'une série de Dirichlet vérifient les inégalités*

$$\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1.$$

Démonstration. L'inégalité $\sigma_c \leqslant \sigma_a$ est claire puisque la convergence absolue implique la convergence. Si $s > s_0 > \sigma_c$, alors

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{o}(1)$$

et

$$\frac{a_n}{n^{s+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1+s-s_0}}\right),$$

donc la série $a_n n^{1+s-s_0}$ est absolument convergente. On en déduit

$$\sigma_a \leqslant 1 + s$$

et on conclut en faisant tendre s vers σ_c. □

EXEMPLE 3.9 — Là encore, tous les cas sont possibles :
- — $\sigma_a = \sigma_c = -\infty$ si $a_n = \frac{1}{n!}$;
- — $\sigma_a = \sigma_c = +\infty$ si $a_n = n!$;
- — $\sigma_c = \sigma_a = 1$ si $a_n = 1$;
- — $\sigma_c = 0$ et $\sigma_a = 1$ si $a_n = (-1)^{n+1}$.

En général, une série de Dirichlet est donc divergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_c$, convergente mais non absolument convergente sur la bande $\sigma_c < \mathfrak{Re}(\cdot) < \sigma_a$, de largeur au plus 1, et absolument convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re} > \sigma_a$.

3.2. Lien avec la fonction sommatoire

Nous allons voir maintenant que l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$$

est étroitement reliée au taux de croissance de la fonction sommatoire

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n.$$

PROPOSITION 3.10 — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *l'abscisse de convergence σ_c est finie ou $-\infty$;*
(ii) *la fonction sommatoire a une croissance polynomiale : il existe $c \geqslant 0$ tel que $S(x) = \mathrm{O}(x^c)$.*

Démonstration — Si la série de Dirichlet converge en $\sigma \in \mathbf{R}$, alors $a_n n^{-\sigma} = \mathrm{O}(1)$ et donc

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n = \mathrm{O}\left(\sum_{n \leqslant x} n^\sigma\right) = \mathrm{O}(x^{\sigma+1}),$$

au moins pour $\sigma \neq -1$. Si $\sigma = -1$, la série converge a fortiori pour $\sigma = 0$ et donc $S(x) = \mathrm{O}(x)$. Réciproquement, si $S(x) = \mathrm{O}(x^c)$, alors

$$a_n = S(n) - S(n-1) = \mathrm{O}(n^c)$$

et la série de Dirichlet est donc convergente en $s=c+2$. □

Nous pouvons donner un résultat plus précis lorsque l'abscisse de convergence est positive.

PROPOSITION 3.11 — *Si l'abscisse de convergence σ_c de la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ est positive, alors*

$$\sigma_c = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log|S(x)|}{\log x}.$$

Démonstration. Supposons que la série de Dirichlet converge en $s_0 \in \mathbf{R}_{>0}$. En posant

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} \frac{a_n}{n^x} = \mathrm{O}(1),$$

il vient

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n\leqslant x} a_n \\
&= \sum_{n\leqslant x}^{x} (R(n)-R(n-1))n^{s_0} \\
&= \sum_{n\leqslant x} R(n)(n^{s_0}-(n+1)^{s_0}) + R(\lfloor x\rfloor)(\lfloor x\rfloor+1)^{s_0} \\
&= \mathrm{O}\left(\sum_{n\leqslant x}((n+1)^{s_0}-n^{s_0})\right) + \mathrm{O}(x^{s_0}) \\
&= \mathrm{O}(x^{s_0})
\end{aligned}$$

et donc

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\log S(x)}{\log x} \leqslant s_0.$$

Réciproquement, si $\limsup_{x\to+\infty} \frac{\log S(x)}{\log x} < c$, alors $S(x) = \mathrm{O}(x^c)$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} &= \sum_{n=M}^{N} \frac{S(n)-S(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=M}^{N} S(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{S(M-1)}{M^s} + \frac{S(N)}{(N+1)^s} \\
&= \mathrm{O}\left(\sum_{n=M}^{N} n^c\cdot\frac{1}{n^{s+1}}\right) + \mathrm{O}(M^{c-s}+N^{c-s}).
\end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^{s+1-c}}$ étant convergente pour $s>c$, la série de Dirichlet converge pour $s>c$, i.e. $\sigma_c \leqslant c$. □

REMARQUE 3.12 — On dispose bien entendu d'un résultat analogue pour l'abscisse de convergence absolue, en considérant la fonction sommatoire $\sum_{n\leqslant x} |a_n|$.

PROPOSITION 3.12 — *S'il existe $A\in\mathbf{R}$ tel que $S(x) = Ax + \mathrm{o}(x)$, alors la série de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n\leqslant x} \frac{a_n}{n^s}$$

a pour abscisse de convergence 1*. En outre, pour tout cône* $C = 1 + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{i\vartheta} + \mathbf{R}_{\geqslant 0}e^{-i\vartheta}$ *avec* $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\lim_{s \in C, s \to 1^+} (s-1)f(s) = A.$$

Démonstration. On a $\sigma_c = 1$ par application de la proposition précédente puisque $\log S(x) \sim \log x$.

Posons $b_n = a_n - A$, de sorte que

$$g(s) = f(s) - A\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n}{n^s}.$$

Puisque

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1$$

en vertu de l'exemple 3.6, il suffit de traiter le cas $A = 0$; c'est ce que nous supposons par la suite.

Le raisonnement est analogue à celui conduit pour démontrer la proposition 3.1. Effectuons encore une fois la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=M}^{N} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{S(M-1)}{M^s} + \frac{S(N)}{(N+1)^s}.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque $S(x) = \mathrm{o}(x)$, il existe M_0 tel que $|S(n)| \leqslant \varepsilon n$ pour tout $n > M_0$. En considérant $N \geqslant M > M_0$, il vient, en posant de nouveau $k = \frac{1}{\cos \vartheta}$ et $a = \mathfrak{Re}(s)$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=M}^{N} \frac{a_n}{n^s} \right| &\leqslant \varepsilon \left(\sum_{n=M}^{N} n \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| + \frac{M}{|M^s|} + \frac{N}{|(N+1)^s|} \right) \\
&\leqslant \varepsilon k \left(\sum_{n=M}^{N} n \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a} \right) + M^{1-a} + N^{1-a} \right) \\
&\leqslant \varepsilon k \left(\sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^a} (n - (n-1)) + 2M^{1-a} + 2N^{1-a} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant $M = 1$ et $N \to +\infty$:

$$\left| (s-1) \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} \right| \leqslant \varepsilon k (a-1)(\zeta(a) + 2),$$

d'où

$$\limsup_{s \in C, s \to 1^+} \left| (s-1) \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} \right| \leqslant \varepsilon k$$

et donc

$$\lim_{s \in C, s \to 1^+} (s-1)f(s) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

La réciproque est fausse : il se peut que $(s-1)f(s)$ ait une limite en 1^+ sans que pour autant $\frac{S(x)}{x}$ en ait une en $+\infty$. Considérons par exemple $a_n = (-1)^{n+1} n$, auquel cas

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{s-1}} = (1 - 2^{2-s})\zeta(s-1)$$

pour $\mathfrak{Re}(s) > 2$. La série apparaissant à gauche converge sur l'intervalle $]1, +\infty[$, où elle vérifie $0 < f(s) < 1$ d'après le théorème des séries alternées ; on a donc

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1) f(s) = 0.$$

Cependant,

$$\frac{S(N)}{N} = \sum_{n \leqslant N} (-1)^{n+1} n = \begin{cases} -\frac{N}{2} & \text{si } 2|N ; \\ \frac{N-1}{2} & \text{si } 2 \nmid N. \end{cases}$$

n'a pas de limite en $+\infty$ puisque

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \limsup_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

L'encadrement évident $-1/2 \leqslant 0 \leqslant 1/2$ se généralise, ce que nous admettrons.

THÉORÈME 3.13 — *Si une série de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$$

converge pour $s > 1$, *alors*

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x} \leqslant \liminf_{s \to 1^+} (s-1) f(s) \leqslant \limsup_{s \to 1^+} (s-1) f(s) \leqslant \limsup_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x}.$$

Démonstration. Admis. □

3.3. Les séries de Dirichlet des fonctions arithmétiques

Comme nous l'avons dit, les séries de Dirichlet sont naturellement les séries génératrices des fonctions arithmétiques. Pour $f \in \mathscr{A}$, posons

$$D_f(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Si f est à croissance polynomiale, alors l'abscisse de convergence de D_f est dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ (Proposition 3.10). Nous noterons σ_f l'abscisse de convergence *absolue* de D_f.

PROPOSITION 3.14 — *Si* $f, g \in \mathscr{A}$ *sont deux fonctions arithmétiques telles que* $\sigma_f, \sigma_g < +\infty$, *alors* $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$ *et*

$$D_{f*g}(s) = D_f(s) D_g(s).$$

Démonstration. Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $a = \mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_g)$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \frac{|f * g(n)|}{|n^s|} &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^a} \left| \sum_{uv=n} f(u) g(v) \right| \\ &\leqslant \sum_{n \geqslant 1} \sum_{uv=n} \frac{|f(u)|}{u^a} \frac{|f(v)|}{v^a} \\ &\leqslant \sum_{u \geqslant 1} \frac{|f(u)|}{u^a} \sum_{v \geqslant 1} \frac{|g(v)|}{v^a}. \end{aligned}$$

Cela montre que $D_{f*g}(s)$ converge absolument si $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$, donc $\sigma_{f*g} \leqslant \max(\sigma_f, \sigma_g)$, et les inégalités précédentes sont alors des égalités si l'on omet les modules puisque la convergence absolue permet de regrouper les termes à notre guise. □

COROLLAIRE 3.15 — *Si $f \in \mathscr{A}$ est inversible et si $\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}} < +\infty$, alors*

$$D_f(s) D_{f^{(-1)}}(s) = 1$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) \geqslant \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$. En particulier, $D_f(s)$ ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \max(\sigma_f, \sigma_{f^{(-1)}})$.

EXEMPLE 3.16 — 1. On a $D_1(s) = \zeta(s)$ et $\sigma_1 = 1$. L'inverse de 1 est la fonction de Möbius, qui vérifie $\sigma_\mu \leqslant 1$ puisque $|\mu(n)| \leqslant 1$ pour tout n. Comme

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{|\mu(n)|}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}$$

diverge, il vient $\sigma_\mu = 1$. On en déduit que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, ainsi que l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

2. On sait que la fonction d comptant le nombre de diviseurs d'un entier vérifie $d = 1 * 1$. On a donc $\sigma_d \leqslant 1$, puis $\sigma_d = 1$ puisque

$$\Sigma_{n \geqslant 1} \frac{d(n)}{n} \geqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tels que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

3. On sait que $\varphi = \mathrm{id} * \mu$. Comme $D_{id}(s) = \zeta(s-1)$ a pour abscisse de converge absolue 0, $\sigma_\varphi \leqslant 1$. Il s'agit en fait d'une égalité puisque

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \sum_p \frac{p-1}{p}$$

diverge. On en déduit l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

4. Considérons finalement la fonction de von Mangolt $\Lambda = \mu * \log$. On a $\sigma_\Lambda \leqslant 1$ et $\sigma_\Lambda = 1$ par divergence de

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n} \geqslant \sum_p \frac{1}{p}.$$

Puisque $D_{\log}(s) = -\zeta(s)$ et $D_\mu(s) = \zeta(s)^{-1}$, nous obtenons l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

Le résultat suivant montre qu'une fonction arithmétique à croissance polynomiale est entièrement déterminée par sa série de Dirichlet. Il permet en particulier d'établir des identités entre fonctions arithmétiques à partir de calculs sur leurs séries de Dirichlet.

PROPOSITION 3.17 — *Soit $f, g \in \mathscr{A}$ deux fonctions arithmétiques à croissance polynomiale. S'il existe $c > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ tel que $D_f(s) = D_g(s)$ pour tout $s \in [c, +\infty[$, alors $f = g$.*

Démonstration. En posant $h = f - g$, nous avons $\sigma_h \leqslant \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ et $D_h(s) = 0$ pour tout $s \in [c, +\infty[$. Supposons que h ne soit pas identiquement nulle et désignons par n_0 le plus petit entier tel que $h(n) \neq 0$. L'hypothèse nous permet d'écrire

$$\frac{h(n_0)}{n_0^{c+t}} = -\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{h(n)}{n^{c+t}}$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. En observant que l'on a

$$\frac{n_0^{c+t}}{n^{c+t}} = \frac{n_0^c}{n^c} \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^t \leqslant \frac{n_0^c}{n^c} \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, il vient

$$|h(n_0)| \leqslant n_0^c \left(\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|h(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^t$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$. Nous en déduisons $h(n_0) = 0$ en faisant tendre t vers $+\infty$, ce qui contredit notre hypothèse ; la fonction h est donc identiquement nulle, c'est-à-dire $f = g$. □

COROLLAIRE 3.18 — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique à croissance polynomiale. Si f n'est pas identiquement nulle, il existe un nombre réel c tel que $D_f(s)$ ne s'annule pas sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.*

Démonstration. Supposons que n_0 soit le plus petit entier tel que $f(n_0) \neq 0$. Si $s \in \mathbf{C}$ est un nombre complexe tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et $D_f(s) = 0$, nous pouvons écrire comme dans la démonstration précédente

$$|f(n_0)| \leqslant n_0^{\mathfrak{Re}(s)} \sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^{\mathfrak{Re}(s)}} = n_0^c \left(\sum_{n \geqslant n_0+1} \frac{|f(n)|}{n^c}\right) \cdot \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^{\mathfrak{Re}(s)-c}$$

pour tout $c > \sigma_f$ et donc $\mathfrak{Re}(s)$ est majorée en fonction de n_0 et c. □

Sans surprise, enfin, les séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives ont une structure particulière.

PROPOSITION 3.19 — *Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction arithmétique* multiplicative *à croissance polynomiale.*

(i) *Pour tout nombre premier p, la série restreinte*

$$D_{f,p}(s) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}}$$

converge absolument uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$.

(ii) *La suite des produits $\prod_{p \leqslant N} D_{f,p}(s)$ converge uniformément sur tout demi-plan fermé contenu dans $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$ et*

$$D_f(s) = \prod_p D_{f,p}(s).$$

(iii) *S'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\sum_p \sum_{m\geqslant 1} \left| \frac{|f(p^m)|}{p^{mc}} \right| < +\infty,$$

alors $\sigma_f \leqslant c$ et

$$D_f(s) = \prod_p D_{f,s}(s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$ de partie réelle strictement supérieure à c.

Démonstration. (i) Il suffit d'écrire

$$\sum_{m\geqslant 0} \left| \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{|f(n)|}{n^c} < +\infty.$$

(ii) Notons $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à N.

$$\prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} D_{f,p}(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} \left(\sum_{m\geqslant 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{\nu:\mathscr{P}_{\leqslant N}\to\mathbf{N}} \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} \frac{f(p^{\nu(p)})}{p^{\nu(p)s}} = \sum_{\nu:\mathscr{P}_{\leqslant N}\to\mathbf{N}} \frac{f(n_\nu)}{n_\nu^s},$$

où l'on a posé $n_\nu = \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} p^{\nu(p)}$. Lorsque ν parcourt l'ensemble des applications de $\mathscr{P}_{\leqslant N}$ dans $\mathbf{N}$, n_ν décrit l'ensemble des entiers strictement positifs dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à N. Puisque ceux-ci contiennent certainement tous les entiers inférieurs à N, nous en déduisons

$$\left| D_f(s) - \prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} D_{f,p}(s) \right| \leqslant \sum_{n>N} \frac{|f(n)|}{n^c},$$

ce qui établit la convergence de $\prod_{p\in\mathscr{P}_{\leqslant N}} D_{f,p}(s)$ vers $D_f(s)$, uniformément sur tout demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$.

(iii) Cette hypothèse équivaut à la convergence du produit infini

$$\prod_p \left(1 + \sum_{m\geqslant 1} \left| \frac{f(p^m)}{p^{mc}} \right| \right).$$

En raisonnant comme au point (ii), la multiplicativité de f entraîne la majoration

$$\sum_{n\leqslant N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant \prod_{p\leqslant N} \left(1 + \sum_{m\geqslant 1} \left| \frac{f(p^m)}{p^{mc}} \right| \right)$$

pour tout $N \geqslant 2$, et donc la convergence de $D_f(s)$, uniformément sur le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geqslant c$. On a donc $\sigma_f \leqslant c$, et $D_f(s) = \prod_p D_{f,p}(s)$ d'après le point (ii). □

REMARQUE 3.20 — Lorsque f est *complètement multiplicative*, c'est-à-dire vérifie $f(mn) = f(m)f(n)$ pour *tous* entiers m et n, la formule du point (ii) s'écrit plus simplement sous la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

C'est une généralisation de la formule du produit d'Euler.

EXEMPLE 3.21 — On a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

pour tout complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$.

4. Les nombres premiers en progression arithmétique : le théorème de Dirichlet

4.1. Caractères de Dirichlet

Définition 4.1 — *Soit* $N \geqslant 1$ *un nombre entier. Un* caractère de Dirichlet modulo N *est une fonction* $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ *induite par un morphisme de groupes* $\overline{\chi} : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$. *Plus précisément :*

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si pgcd}(n,N) \neq 1 \\ \overline{\chi}(n \pmod N) & \text{si pgcd}(n,N) = 1. \end{cases}$$

Le caractère de Dirichlet modulo N tel que $\chi(n) = 1$ pour tout entier n premier à N est dit *principal* (ou *trivial*).

Il peut arriver qu'un caractère de Dirichlet modulo N se factorise par $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$ avec $M|N$ et $M \neq N$, c'est-à-dire que χ provienne d'un caractère de Dirichlet modulo M via la projection canonique

$$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times .$$

Cette observation motive la définition suivante.

Définition 4.2 — *Le* conducteur *d'un caractère de Dirichlet* χ *est le plus petit entier* M *(au sens de la divisibilité) tel que* χ *se factorise à travers* $(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})^\times$. *On dit qu'un caractère de Dirichlet modulo* N *est* primitif *si son conducteur est égal à* N.

De façon évidente, le conducteur du caractère principal modulo N est égal à 1.

Exemples 4.3 — 1. *Les caractères de Dirichlet modulo* 4.

Le groupe $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ est cyclique d'ordre 2, engendré par la classe de -1. Il y a deux caractères de Dirichlet modulo 4 : le caractère principal χ_1, défini par $\chi_1(-1) = \chi_1(1) = 1$, et le caractère χ_2, défini par $\chi_2(1) = 1$ et $\chi_2(-1) = -1$.

2. *Les caractères de Dirichlet modulo* 8.

Le groupe $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ est abélien d'ordre 4. Tous ses éléments sont de carré trivial, donc il est à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Plus précisément :

$$(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \simeq \langle\overline{-1}\rangle \times \langle\overline{3}\rangle.$$

Un caractère de Dirichlet modulo 8 envoie tout élément de $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ sur un élément d'ordre (au plus) 2 dans $\mathbf{C}^\times$, donc sur 1 ou -1, et il est entièrement déterminé par la connaissance des images de -1 et de 3. Ces observations permettent de dresser aisément la liste de tous les caractères de Dirichlet modulo 8 :

	1	-1	3	-3	conducteur
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	4
χ_3	1	1	-1	-1	8
χ_4	1	-1	1	-1	8

Les caractères qui se factorisent à travers $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$ sont ceux qui sont triviaux sur le noyau $\{1,-3\}$ de la projection canonique $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times \to (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\times$.

4.2. Fonctions L de Dirichlet

On associe à tout caractère de Dirichlet χ modulo N la série de Dirichlet
$$L(\chi,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$
Comme $|\chi(n)|\leqslant 1$, cette série de Dirichlet est absolument convergente sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>1$ et
$$L(\chi,s)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$
sur ce demi-plan par multiplicativité complète de χ.

PROPOSITION 4.4 — *Soit χ un caractère de Dirichlet modulo N.*

1. *Si $\chi=1$ est le caractère principal, alors l'abscisse de convergence (absolue) de $L(1,s)$ est égale à 1 et*
$$L(1,s)=\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\zeta(s)$$
pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s)>1$.

2. *Si χ n'est pas principal, alors :*
   (i)
$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant\varphi(N)$$
   pour tout nombre réel $x\geqslant 0$;
   (ii) *l'abscisse de convergence (resp. de convergence absolue) de la série de Dirichlet $L(\chi,s)$ est égale à 0 (resp. à 1).*

Démonstration. 1. L'abscisse de convergence (absolue) de $L(1,\chi)$ est égale à 1 puisque la série $\sum_{p\nmid N}\frac{1}{p}$ diverge. On a immédiatement
$$L(1,s)=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{-s}}\right)\zeta(s)$$
sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s)>1$.

2. Considérons maintenant un caractère χ non principal.

Pour établir (i), il suffit d'observer que la fonction sommatoire de χ est N-périodique, puisque
$$\sum_{n\in I}\chi(n)=0$$
pour tout intervalle I de longueur N par orthogonalité de χ et du caractère principal, et d'observer que l'on a trivialement
$$\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant\sum_{n\leqslant N}|\chi(n)|=\varphi(N)$$
pour tout $x\in[0,N]$.

Le fait que la fonction sommatoire de χ soit bornée entraîne que l'abscisse de convergence σ_c de $L(\chi,s)$ vérifie $\sigma_c\leqslant 0$ (Proposition 3.11), et l'on obtient $\sigma_c=0$ en observant que la série $\sum_{n\geqslant 1}\chi(n)$ ne converge pas puisque $|\chi(n)|=1$ pour tout n premier à N. On a par ailleurs $\sigma_a=1$ puisque $|\chi(n)|\leqslant 1$ pour tout n et que la série $\sum_{n\geqslant 1}|\chi(n)|n^{-1}=\sum_{n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(n,N)=1}n^{-1}$ diverge. □

4.3. Démonstration du théorème de la progression arithmétique

Le point-clef pour démontrer le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet est l'observation suivante.

PROPOSITION 4.5 — *Pour tout caractère de Dirichlet χ non principal,*

$$L(\chi,1)\neq 0.$$

Démonstration. Pour s de partie réelle >1,

$$\prod_{\chi \bmod N} L(\chi,s)=\prod_{\chi \bmod N}\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid N}\prod_{\chi \bmod N}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{f(p)s}}\right)^{-g(p)},$$

où $f(p)$ désigne l'ordre de p dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ et $g(p)=\varphi(N)/f(p)$. En effet, $\chi(p)$ est toujours une racine $f(p)$-ième de l'unité, et chacune apparaît $g(p)$ fois (voir les rappels sur les caractères des groupes abéliens finis dans la section 4). La dernière égalité découle de la factorisation

$$1-X^f=\prod_{\xi}(1-\xi X)$$

dans $\mathbf{C}[X]$, où ξ parcourt l'ensemble des racines f-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$.

On reconnaît à droite un produit des séries géométriques $\sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{p^{ms}}$, donc nous pouvons écrire

$$\prod_{\chi \bmod N} L(\chi,s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^s} \tag{5}$$

avec $a_n\geqslant 0$ pour tout n ; c'est une propriété remarquable, puisque chacune des séries $L(\chi,s)$ est à coefficients complexes !

Désignons par σ l'abscisse de convergence (absolue) de cette série de Dirichlet.

En observant que l'on a

$$1-\frac{1}{p^{f(p)/\varphi(N)}}=1-\frac{1}{p^{1/g(p)}}\leqslant 1-\frac{1}{p},$$

il vient

$$\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{f(p)/\varphi(N)}}\right)^{-g(p)}=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{1/g(p)}}\right)^{-g(p)}\geqslant\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-g(p)}\geqslant\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Comme le produit de droite est divergent (TD1, exercice 3), on obtient déjà

$$\sigma\geqslant\frac{1}{\varphi(N)}.$$

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant qu'il existe un caractère non principal χ_0 tel que $L(\chi_0,1)=0$. La fonction

$$L(1,s)L(\chi_0,s)=\prod_{p\mid N}(1-p^{-s})\zeta(s)L(\chi_0,s)$$

se prolonge alors en une fonction holomorphe sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ puisque, comme nous l'avons établi précédemment, $\zeta(s)$ admet un prolongement méromorphe sur ce demi-plan ayant un unique pôle, simple, en $s = 1$. La série de Dirichlet figurant dans l'équation (1) admet donc un prolongement holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$, ce qui impose $\sigma \leqslant 0$ pour son abscisse de convergence (absolue) σ en vertu de la proposition suivante. Nous avons abouti à une contradiction, ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION 4.6 (LANDAU) — *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels* positifs *telle que la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ ait une abscisse de convergence $\sigma < +\infty$. La fonction $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, définie sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \sigma$, n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de σ.*

Démonstration. Si l'on pose $b_n = a_n n^{-\sigma}$, de sorte que $a_n n^{-s} = b_n n^{-(s-\sigma)}$, la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-t}$ est encore à coefficients positifs, a pour abscisse de convergence 0 et se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0 si et seulement si f se prolonge holomorphiquement au voisinage de σ. Cette observation montre qu'il suffit donc de considérer le cas $\sigma = 0$.

Supposons que f admette un prolongement holomorphe sur un disque ouvert D de centre 0. En observant que $a_n n^{-s}$ croît vers a_n lorsque s tend vers 0 dans $]0, +\infty[$, nous pouvons écrire

$$f(0) = \lim_{s\to 0,\ s>0} f(s) = \sup_{s>0} f(s) \geqslant \sup_{s>0} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

pour tout $N \geqslant 1$, donc la série numérique de terme général $a_n \geqslant 0$ est convergente. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui fournit l'égalité

$$f(0) = \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

Nous pouvons reproduire ce raisonnement avec la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n)n^{-s}$, de somme $-f'(s)$ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ et à coefficients tous positifs ; nous obtenons

$$f'(0) = -\sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n).$$

Plus généralement, en itérant ce raisonnement,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n\geqslant 1} a_n(\log n)^k$$

pour tout $k \geqslant 0$.

Par hypothèse, la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} (-1)^k a_n (\log n)^k z^k$$

converge sur le disque D. En l'évaluant en un nombre réel $t < 0$ dans D, nous obtenons une série double convergente à termes positifs ; il est donc licite d'intervertir les deux sommes et de conclure à la convergence de la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}(-t\log n)^k = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-t\log n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^t}.$$

Il en découle que l'abscisse de convergence σ de notre série de Dirichlet est inférieure à t, et donc strictement négative. Comme $\sigma = 0$, c'est une contradiction et f ne peut donc pas avoir de prolongement hololomorphe au voisinage de σ. □

Il est maintenant facile de démontrer le théorème de Dirichlet.

THÉORÈME 4.7 (DIRICHLET) — *Soit* $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ *et* $a \in \mathbf{Z}$ *avec* $\mathrm{pgcd}(a,N) = 1$. *Il existe une infinité de nombres premiers congrus à* a *modulo* N.

Démonstration. Désignons par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et par $\mathscr{P}_{(a,N)}$ le sous-ensemble des nombres premiers congrus à a modulo N. La série de Dirichlet

$$\sum_{p \in \mathscr{P}_{(a,N)}} \frac{1}{p^s}$$

converge sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et l'on peut écrire

$$\sum_{p \in \mathscr{P}_{(a,N)}} \frac{1}{p^s} = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\mathbf{1}_{\{\overline{a}\}}(p)}{p^s}$$

où

$$\mathbf{1}_{\{\overline{a}\}} : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}$$

désigne la fonction caractéristique du singleton $\{\overline{a}\}$.

L'analyse harmonique sur le groupe abélien $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ (voir la section suivante pour des rappels) permet d'écrire $\mathbf{1}_{\{\overline{a}\}}$ à l'aide des caractères de Dirichlet modulo N :

$$\mathbf{1}_{\{\overline{a}\}} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \chi.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathscr{P}_{(a,N)}} \frac{1}{p^s} &= \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{p,\chi} \overline{\chi(a)} \frac{\chi(p)}{p^s} \\ &= \frac{1}{\varphi(N)} \left(\sum_{p \in \mathscr{P},\ p \nmid N} \frac{1}{p^s} + \sum_{\chi \neq 1} \overline{\chi(a)} f_\chi(s) \right) \end{aligned}$$

avec

$$f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}.$$

Comme

$$\sum_{p \in \mathscr{P},\ p \nmid N} \frac{1}{p^s} = \log \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)$$

pour tout $s \in]1, +\infty[$, le théorème sera démontré si l'on prouve que $f_\chi(s)$ est bornée au voisinage de $s = 1$ pour tout $\chi \neq 1$.

Pour ce faire, on peut remplacer $f_\chi(s)$ par

$$g_\chi(s) = f_\chi(s) + \sum_{p \in \mathscr{P},\ m \geqslant 2} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}} = \sum_{p \in \mathscr{P},\ m \geqslant 1} \frac{\chi(p)^m}{m p^{ms}} = -\sum_{p \in \mathscr{P}} \log(1 - \chi(p) p^{-s}) \tag{6}$$

puisque

$$\left| \sum_{p \in \mathscr{P}, m \geqslant 1} \frac{\chi(p)}{m p^{ms}} \right| \leqslant \sum_{p \in \mathscr{P},\ m \geqslant 2} \frac{1}{p^{m \mathfrak{Re}(s)}} = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^{\mathfrak{Re}(s)} (p^{\mathfrak{Re}(s)} - 1)}$$

est bornée sur tout compact du demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

On a $e^{g_\chi(s)} = L(\chi, s)$ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Nous savons que $L(\chi, s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$ telle que $L(\chi, 1) \neq 0$. En choisissant une détermination du logarithme sur un voisinage de $L(\chi, 1)$ dans $\mathbf{C}^\times$, nous en déduisons que $g_\chi(s)$ se prolonge également en une fonction holomorphe, et donc est bornée, sur un voisinage U de $s = 1$.

Au final, nous avons établi l'estimation asymptotique

$$\sum_{p\in\mathscr{P}_{a,N}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(N)} \log \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(1)$$

pour tout s dans $]1,+\infty[\cap U$. Cela montre que le membre de gauche diverge lorsque s tend vers 1^+, donc $\mathscr{P}_{a,N}$ est un ensemble infini. □

4.4. Annexe : Analyse harmonique sur un groupe abélien fini.

Soit G un groupe abélien fini.

1. Un *caractère* de G est un morphisme de groupes $\chi : G \to \mathbf{C}^\times$. L'ensemble

$$\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, \mathbf{C}^\times)$$

des caractères de G est un groupe pour la multiplication usuelle des fonctions (i.e. $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$), appelé *groupe dual* et non canoniquement isomorphe [6] à G. Son élément neutre est le caractère *trivial*, qui envoie G sur $\{1\}$; on le note 1.

EXEMPLE — Si $G = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, alors on dispose d'un isomorphisme canonique $\widehat{\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \mu_N$, $\chi \mapsto \chi(1)$. Choisir un isomorphisme entre $\widehat{\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}$ et $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ revient à choisir une racine N-ième de l'unité primitive.

2. [Fonctorialité] Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes abéliens, alors l'application $f^* : \widehat{G'} \to \widehat{G}$, $\chi \mapsto \chi \circ f$, est un morphisme de groupes. Étant donné un sous-groupe H de G, la suite exacte naturelle

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 1$$

induit une suite *exacte* [7]

$$1 \longrightarrow \widehat{G/H} \xrightarrow{\pi^*} \widehat{G} \xrightarrow{\iota^*} \widehat{H} \longrightarrow 1\ .$$

Autrement dit : tout caractère de H se prolonge en un caractère de G, et les caractères du groupe quotient G/H s'identifient aux caractères de G qui sont triviaux sur H.

En particulier, si a est un élément de G d'ordre f, alors

(i) $\chi(a)$ est une racine f-ième de l'unité dans $\mathbf{C}$ pour tout caractère χ de G;

(ii) lorsque χ parcourt l'ensemble $\widehat{G}$, chaque racine f-ième de l'unité apparaît exactement $|G|/f$ fois parmi les $\chi(a)$.

Pour le vérifier, il suffit de considérer la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \langle a\rangle^\perp \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \widehat{\langle a\rangle} \longrightarrow 1$$

où $\langle a\rangle^\perp = \{\chi \in \widehat{G} \mid \chi(a) = 1\}$, et de remarquer que l'application $\chi \mapsto \chi(a)$ réalise un isomorphisme entre $\widehat{\langle a\rangle}$ et $\mu_f(\mathbf{C})$.

6. C'est facile à établir lorsque G est cyclique, et le cas général s'en déduit en utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis.

7. Cela signifie que le noyau de chaque flèche et égal à l'image de la flèche précédente.

3. Les caractères de G forment une *base orthonormée* du $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes sur G relativement au produit scalaire hermitien

$$(f|g) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{f(x)}g(x).$$

Nous pouvons donc écrire toute fonction complexe f sur G sous la forme

$$f = \sum_{\chi\in\widehat{G}}(\chi|f)\chi.$$

En particulier (*relations d'orthogonalité*) :

(i) pour tout $\chi\in\widehat{G}$,

$$\sum_{x\in G}\chi(x) = |G|(1|\chi) = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(ii) pour tout $x\in G$,

$$\sum_{\chi\in\widehat{G}}\chi(x) = \begin{cases} |G| & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On peut le justifier ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in\widehat{G}}\chi(x) &= \left(\sum_{\chi\in\widehat{G}}\chi(x)\chi\right)(1)\\ &= |G|\left(\sum_{\chi\in\widehat{G}}(\mathbf{1}_{\{x\}}|\chi)\chi\right)(1)\\ &= |G|\mathbf{1}_{\{x\}}(1)\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique du singleton $\{x\}$.

On peut aussi invoquer la *bidualité* : le morphisme de groupes canonique

$$G\to\widehat{\widehat{G}},\ \ x\mapsto(\chi\mapsto\chi(x))$$

est un isomorphisme et (ii) est une reformulation de (i) en remplaçant G par $\widehat{G}$.

5. La fonction zêta de Riemann

5.1. La fonction Gamma d'Euler

Euler observa que l'identité

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, \mathrm{d}t,$$

valable pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et que l'on démontre aisément par récurrence et intégration par parties, permet d'étendre le domaine de définition de la fonction factorielle : le second membre garde en effet un sens lorsque l'entier n est remplacé par n'importe quel nombre réel dans $]-1, +\infty[$.

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) > 1$, la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t. \tag{7}$$

Remarque 1 — On a immédiatement

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

si l'on connaît la valeur de l'intégrale de Gauss.

Proposition 2 — (i) *La fonction* Γ *ainsi définie est* holomorphe *sur le demi-plan* $\mathfrak{Re}(z) > 0$, *sur lequel*
elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{8}$$

(ii) *Elle se prolonge de manière unique en une fonction méromorphe sur* $\mathbf{C}$, *encore notée* Γ.

(iii) *La fonction* Γ *satisfait l'équation fonctionnelle (2) sur* $\mathbf{C}$. *Ses pôles, tous simples, sont les entiers négatifs, et le résidu de* Γ *en* $-n$ *est* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration. (i) Il s'agit d'une application du *théorème d'holomorphie sous l'intégrale* :

- la fonction

$$\mathbf{R} \times \mathbf{C}, \quad (t, z) \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{-t+(z-1)\log t}$$

  est continue, donc intégrable par rapport à t sur tout segment, et elle est holomorphe par rapport à la seconde variable ;
- pour tous nombres réels $0 < a < b$ et tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ tel que $a \leqslant \mathfrak{Re}(z) \leqslant b$, la majoration

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\mathfrak{Re}(z)-1} \leqslant \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

  fournit une domination *uniforme* en z dans la bande verticale $\mathscr{B}_{a,b} = \{z \in \mathbf{C} \mid a \leqslant \mathfrak{Re}(z) \leqslant b\}$ par une fonction intégrale sur $[0, +\infty[$.

Sous ces hypothèses, le théorème d'holomorphie sous l'intégrale fournit l'holomorphie de la fonction Γ sur l'intérieur de $\mathscr{B}_{a,b}$, et donc sur tout le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$ puisqu'il s'agit d'une propriété locale.

(ii) L'unicité du prolongement se déduit directement du principe du prolongement analytique : si $Z \subset \mathbf{C}$ est une partie discrète et si f et g sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{C} \setminus Z$ qui coïncident avec Γ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors $f = g$ en vertu du principe du prolongement analytique, car $\mathbf{C} \setminus Z$ est connexe et le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$ est un ouvert non vide de $\mathbf{C}$.

Existence : étant donné un entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction Γ_n définie sur le demi-plan $\Omega_n = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > -n\}$ par

$$\Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

C'est une fonction méromorphe sur ce demi-plan, ayant des pôles simples en $0, -1, \ldots, -(n-1)$. Les fonctions Γ_{n+1} et Γ_n coïncident sur Ω_n puisque

$$\Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma_n(z)$$

pour tout $z \in \Omega_n \setminus \{0, -1, \ldots, -(n-1)\}$, donc il existe une unique fonction F sur $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ tel que $F(z) = \Gamma_n(z)$ pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ tels que $\mathfrak{Re}(z) > -n$.

(iii) L'identité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ entre fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ est vérifiée sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z)$, donc également sur tout $\mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$ en vertu du principe du prolongement analytique.

Considérons finalement $n \in \mathbf{N}$ et écrivons

$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

pour tout $z \in \Omega_{n+1} \setminus \{0, -1, \ldots, -n\}$. Comme $\Gamma(1) = 1$, nous en déduisons l'équivalent

$$\Gamma(z) \sim \frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)(z+n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$$

au voisinage de $-n$. Ceci prouve que Γ admet un pôle simple en $-n$, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$. □

Le prolongement méromorphe de la fonction Γ que nous venons de construire à partir de l'équation fonctionnelle peut s'obtenir différemment, en écrivant explicitement une fonction méromorphe qui coïncide avec Γ sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Pour ce faire, on commence par écrire

$$e^{-t} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. La domination

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \exp n\left(-\frac{t}{n}\right) = e^{-t}$$

vaut pour $n > |t|$ en vertu de l'inégalité $\log(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$. Le théorème de convergence dominée nous permet donc d'écrire :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\, \mathrm{d}u$$

pour tout nombre complexe z tel que $\mathfrak{Re}(z) > 0$. On définit classiquement la *fonction Bêta d'Euler* en posant

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1} \, \mathrm{d}u$$

pour x, y dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$. En utilisant de façon répétée l'identité

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$$

(cf. le lemme ci-dessous), il vient

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{z+n} B(n,z) n^z = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(z+1)\cdots(z+n)} B(1,z) n^z,$$

d'où au final

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{9}$$

puisque $B(1,z) = 1$.

Lemme 3 — *Pour tous nombres complexes x, y tels que $\mathfrak{Re}(x), \mathfrak{Re}(y) > 0$,*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

Démonstration. Une intégration par parties conduit à

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-u)^x u^{y-1} \, \mathrm{d}u = \frac{x}{y} \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^y \, \mathrm{d}u = \frac{x}{y} B(x,y+1).$$

En développant $(1-u)^y = (1-u)^{y-1}(1-u)$, il vient

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y).$$

La conclusion s'obtient en combinant ces deux identités. □

L'identité (3) s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} n^{-z} \qquad (\mathfrak{Re}(z) > 0). \tag{10}$$

Au membre de droite figure une suite de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous allons voir que la convergence est uniforme sur tout compact, et donc que la limite est holomorphe sur $\mathbf{C}$; c'est l'expression de Γ que l'on souhaitait.

Proposition 4 — *Pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} \, n^{-z}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact. En particulier, la fonction Γ ne s'annule en aucun point de $\mathbf{C}$.

Démonstration. La stratégie de démonstration est très classique : on établit tout d'abord que le membre de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ en prouvant que la convergence est uniforme sur tout compact, puis, en notant Z l'ensemble (discret) des zéros de Γ, on observe que les deux membres sont des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\mathbf{C} \setminus Z$ qui, comme on vient de le voir, coïncident sur l'ouvert non vide $\mathfrak{Re}(z) > 0$; l'égalité vaut alors sur $\mathbf{C} \setminus Z$ en vertu du principe du prolongement analytique. Le membre de droite étant holomorphe sur $\mathbf{C}$, on en déduit immédiatement $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $z \in \mathbf{C}$, posons

$$u_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}.$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ ayant un zéro simple en $0, -1, \ldots, -n$. Écrivons

$$u_n(z) = n^{-z} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)$$

et

$$n^{-z} = e^{-z\log n} = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) - \log(k)\right) = \exp\left(-z\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \cdot \exp\left(z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

(le second facteur du membre de droite compense le terme d'indice $k = n$ dans la somme), d'où

$$u_n(z) = z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot e^{-z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Le facteur $e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ tend vers 1 uniformément sur tout compact, donc nous pouvons le négliger dans ce qui suit. Fixons $R > 0$ et z tel que $|z| \leqslant R$. Pour $k > R$, il vient

$$\left|\frac{z}{k}\right| < 1, \quad \text{et donc} \quad 1 + \frac{z}{k} = e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right)},$$

en définissant $\log(1+x)$ par la série entière usuelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Ceci permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} &= z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot \prod_{R<k\leqslant n} e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \\ &= z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} e^{v_{R,n}(z)} \end{aligned}$$

en posant

$$v_{R,n}(z) = \sum_{R<k\leqslant n}\left(\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

Il existe un nombre $C(R) > 0$ tel que

$$|\log(1+x) - x| \leqslant C(R)x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{C} \text{ tel que } |x| \leqslant \max_{k\in\mathbf{N},\, k>R} \frac{R}{k} < 1.$$

On en déduit la majoration

$$|v_{R,n}(z)| \sum_{R<k\leqslant n}\left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| \leqslant \sum_{R<k\leqslant n} C(R)(R^2+R) \sum_{R<k\leqslant n}\frac{1}{k^2}.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc ceci établit la convergence uniforme de la suite $(v_{R,n})$ sur le disque fermé $D(0,R)$.

Nous avons obtenu ainsi la convergence uniforme de la suite (u_n) sur $D(0,R)$ vers une fonction u_∞ s'écrivant

$$u_\infty(z) = z\prod_{1\leqslant k\leqslant R}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} e^{v_{R,\infty}(z)}$$

pour tout $z \in D(0,R)$. Cette fonction est holomorphe sur l'intérieur de $D(0,R)$, avec un zéro simple en chacun des points $0, -1, \ldots, -\lfloor R \rfloor$. Puisque R a été choisi arbitrairement, la fonction u_∞ est donc holomorphe sur $\mathbf{C}$, avec un zéro simple en chaque entier négatif. $\square$

Corollaire 5 (Formule du produit de Weierstrass) — *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

où γ *désigne la constante d'Euler.*

Démonstration. Il suffit d'écrire, comme dans la démonstration de la proposition précédente,

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}\, n^{-z} = e^{z\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e^{z a_n} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

avec

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \gamma + \mathrm{o}(1).$$

$\square$

Remarque 6 — La non-annulation de Γ sur $\mathbf{C}$ constituera une information importante dans l'étude des singularités (zéros et pôles) du prolongement méromorphe de la fonction ζ sur $\mathbf{C}$.

Outre l'équation fonctionnelle, la fonction Γ satisfait à plusieurs identités remarquables. Parmi celles-ci, en voici qui joueront un rôle important par la suite.

Proposition 7 (Formule des compléments) — *Pour tout* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle et la formule du produit de Weierstrass permettent d'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} = z \prod_{k \geqslant 1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)\left(1 - \frac{z}{k}\right) = z \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

On remarque que le produit infini figurant à droite est uniformément convergent sur tout compact de $\mathbf{C}$ en vertu de l'estimation $\log\left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{z^2}{k^2} + z^4 \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)$ et de la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ (cf. la démonstration de la formule de Gauss ci-dessus).

La conclusion provient immédiatement de la *formule du produit* pour la fonction sinus (Euler) : pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

(voir l'exercice 1 du TD 4 pour une démonstration).

$\square$

Remarque 8 — En faisant $z = \frac{1}{2}$, la formule des compléments fournit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}, \text{ et donc } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Vu la remarque 1, ce calcul fournit donc une manière de retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

Proposition 9 (Formule de duplication) — *Pour tout* $z \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$,

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\Gamma(z).$$

Démonstration. En vertu de la formule de Gauss, le membre de gauche est la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$\begin{aligned} \frac{n^{\frac{z}{2}} n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)} \cdot \frac{n! n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} &= \frac{2^{2n+2}(n!)^2 n^{z+\frac{1}{2}}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)} \\ &= \frac{(n!)^2 n^{z+\frac{1}{2}} 2^{2(n+1)}}{(2n+1)!(2n+1)^z} \cdot \frac{(2n+1)!(2n+1)^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+2n+1)}. \end{aligned}$$

On a

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^z \sim 2^{-z}$$

et, par la formule de Stirling,

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{(2(2n+1)\pi}} \sim \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+1} n^{-\frac{1}{2}} e\sqrt{\pi} \sim 2^{-(2n+1)} n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi},$$

donc

$$\frac{n^{\frac{z}{2}} n!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)} \cdot \frac{n! n^{\frac{z+1}{2}}}{\frac{z+1}{2}\left(\frac{z+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} \sim 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

La conclusion en découle immédiatement en faisant tendre n vers $+\infty$. □

Remarque 10 — En faisant $z = 1$, on retrouve immédiatement

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5.2. Prolongement de la fonction zêta : première méthode

Commençons par définir les *nombres de Bernoulli.*

La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec des pôles simples le long de $2i\pi\mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Elle se prolonge par continuité en 0 puisque $e^z - 1 \sim z$, donc elle est holomorphe au voisinage de 0. Son développement en série entière à l'origine s'écrit

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$

avec $B_n \in \mathbf{R}$. La série entière obtenue a pour rayon de convergence 2π (la distance de l'origine au pôle le plus proche).

Le nombre B_n est par définition le *n-ième nombre de Bernoulli.* Il s'agit manifestement d'un nombre *rationnel* en vertu des règles de calcul sur les séries entières.

Le calcul des premiers nombres de Bernoulli s'effectue facilement :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z-1} &= \left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\cdots\right)^{-1} \\
&= 1-\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots\right)+\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots\right)^{-1}+\dots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4}\right)z^2+\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{8}\right)z^3+\dots \\
&= 1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}+0\cdot z^3+\dots
\end{aligned}$$

donc

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0.$$

Proposition 11 — *Les nombres de Bernoulli sont rationnels et* $B_{2n+1} = 0$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Démonstration. La première assertion découle immédiatement de la rationnalité des coefficients de la série exponentielle et des règles de calcul sur les séries entières. Pour obtenir la seconde, il suffit de vérifier que la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{e^z-1}+1\right) = \frac{ze^z}{2(e^z-1)}$$

est *paire,* ce qui est immédiat. □

En poussant plus loins les calculs, on obtient

$$B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{12},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}\ \cdots$$

Nous en savons assez pour construire un prolongement méromorphe de la fonction zêta sur $\mathbf{C}$. Pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s\, \frac{\mathrm{d}t}{t} = n^s \int_0^\infty e^{-nt} t^s\, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

par le changement de variable $t \leftarrow nt$, donc

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nt} t^{-s}\, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En sommant, nous en déduisons, pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{\infty} e^{-nt}t^s\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n\geqslant 1} e^{-nt}\right)t^s\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^s\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

L'interversion de l'intégrale et de la somme est ici justifiée par le théorème de convergence monotone : il s'agit d'une série de fonctions positives dont la somme est intégrable (en 0, cela découle de l'estimation $t^{s-1}e^t - 1 \sim t^{s-2}$).

Pour aller plus loin, nous allons traiter séparément les bornes 0 et ∞ :

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^s}{e^t-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Dans le membre de droite, la seconde intégrale définit une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}$: il suffit en effet d'invoquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, avec la domination

$$\left|\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\right| \leqslant \frac{t^a}{e^t-1}$$

pour tout s dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) \leqslant a$. Dans la première intégrale, nous pouvons remplacer $\frac{t}{e^t-1}$ par son développement en série entière en 0 et intervertir la somme et l'intégrale puisque le segment $[0,1]$ est contenu dans l'intérieur du disque de convergence $D(0,2\pi)$:

$$\int_0^1 \frac{t^s}{e^t-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}\int_0^1 t^{n+s-2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}\frac{1}{s-(1-n)}.$$

La série de fonctions obtenue est normalement convergente sur tout compact K de $\mathbf{C}\setminus\{1,0,-1,-2,\ldots\}$: en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $|s-(1-n)| \geqslant \delta$ pour tout $s\in K$ et $n\in\mathbf{N}$, et

$$\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{B_n}{n!}\frac{1}{s-(1-n)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta}\sum_{n\geqslant 0}\frac{|B_n|}{n!}$$

est fini puisque 1 est à l'intérieur du disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}z^n$. La somme de cette série de fonctions holomorphes est donc elle-même holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{1,0,-1,-2,\ldots\}$, et même méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec (au plus) un pôle simple en 1 et chaque entier négatif.

Au final, l'identité

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{B_n}{n!}\frac{1}{s-(1-n)} + \int_1^{\infty}\frac{t^s}{e^t-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{11}$$

valable sous la condition $\mathfrak{s} > 1$, fournit bien un prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbf{C}$: le membre de droite est une fonction méromorphe f sur $\mathbf{C}$, donc $\Gamma^{-1}f$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ qui coïncide avec ζ sur son demi-plan de définition.

L'étude des singularités de ce prolongement est aisée : celles du membre de droite de (11) sont des pôles simples :

- en 1, de résidu $B_0 = 1$;
- en 0, de résidu $B_1 = -\frac{1}{2}$;
- en -1, de résidu $\frac{B_2}{2} = \frac{1}{12}$;
- et en chaque entier strictement négatif *pair* $-2n$, de résidu $\frac{B_{2n}}{(2n)!}$ (rappelons que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$).

Comme Γ a un pôle simple en chaque entier négatif $-n$, de résidu $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, on en déduit que (le prolongement de) ζ :

- possède une unique singularité, qui est un pôle simple en 1 ;
- s'annule en tout entier strictement négatif pair.

En outre,

$$\mathrm{Res}_1 \zeta = 1, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2} \text{ et } \zeta(1-2n) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}(-1)^{2n-1}(2n-1)! = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

Remarque 12 — Plus uniformément, nous avons obtenu :

$$\zeta(-n) = -\frac{B_n}{n+1}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Notons également que les valeurs $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ et $\zeta(-1) = \frac{1}{12}$ peuvent s'écrire de manière provocatrice

$$1 + 1 + 1 + \ldots = -\frac{1}{2}$$

et

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = \frac{1}{12},$$

où les membres de gauche sont les séries divergentes obtenues en évaluant terme à terme $\sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$ en 0 et en 1. Ces deux identités sont à comprendre de la façon suivante : étant donnée une suite $\underline{a} = (a_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres complexes, considérons la série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}$; en supposant

(a) que $D(s)$ a une abscisse de convergence finie ;

(b) et que $D(s)$ admet un prolongement méromorphe sur un demi-plan contenant 0 et holomorphe en 0

cela fait sens de poser

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \lim_{s \to 0} D(s).$$

Il est clair que les suites $\underline{a}$ vérifiant les deux conditions ci-dessus forment un espace vectoriel complexe et que l'application $\underline{a} \mapsto \Sigma_D(\underline{a})$ est linéaire. En outre, si $a_n \geqslant 0$ et si la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ associée à la suite $\underline{a}$ est convergente, alors

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \sum_{n \geqslant 1} a_n.$$

En effet, cette hypothèse garantit que l'abscisse de convergence de $D(s)$ est inférieure à 0, et même strictement négative sous l'hypothèse (b) en vertu du lemme de Landau (Proposition 4.6). On a alors

$$\Sigma_D(\underline{a}) = \lim_{s \to 0} D(s) = D(0) = \sum_{n \geqslant 1} a_n$$

par convergence uniforme de $D(s)$ au voisinage de 0. L'opérateur Σ_D est un exemple d'*opérateur de sommation.*

5.3. Prolongement de la fonction zêta : deuxième méthode

(5.2.1) Préliminaires d'analyse de Fourier

Lemme 13 — *Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, périodique de période 1. Posons*

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$. Si la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, alors

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Posons $g(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Il s'agit de la somme d'une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbf{R}$, donc g est continue et vérifie

$$\int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = c_n$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La fonction $f-g$ est continue, 1-périodique et à coefficients de Fourier identiquement nuls, donc est orthogonale à toutes les fonctions $(t \mapsto e^{2i\,\pi nt})$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$; ces dernières formant une base hilbertienne, on en déduit $f-g=0$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$, d'où $f-g=0$ presque partout puis, par continuité, $f=g$. □

Lemme 14 (Transformée de Fourier d'une gaussienne) — *Pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,*

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2}.$$

Démonstration. En complétant le carré dans l'exponentielle, nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \cdot \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nous allons calculer l'intégrale apparaissant au membre de droite à l'aide du théorème des résidus. Fixons $R>0$ et considérons le chemin γ_R constitué par le bord du rectangle de sommets $-R, R, R-i\xi$ et $-R-i\xi$ parcouru dans le sens indirect. La fonction $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$, donc

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

On a d'autre part :

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x + i\int_0^{-\xi} e^{-\pi(R+it)^2}\,\mathrm{d}t + \int_R^{-R} e^{-\pi(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x + i\int_{-\xi}^{0} e^{-\pi(-R+it)}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\left|\int_0^{-\xi} e^{-\pi(\pm R+it)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |\xi| \sup_{|t|\leqslant|\xi|} e^{-\pi(R^2-t^2)} \leqslant |\xi| e^{-R^2},$$

donc, en faisant tendre R vers $+\infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi(x-i\xi)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il est bien connu que l'intégrale de droite est égale à 1 (on calcule son carré en appliquant le théorème de Fubini et en passant en coordonnées polaires). □

Proposition 15 (Formule sommatoire de Poisson) — *Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que :*

(i) la famille $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbf{Z}}$ soit sommable;

(ii) la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ soit uniformément convergente sur $[0,1]$.

On a :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

Démonstration. Posons $F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. La condition (ii) garantit que F est une fonction continue et 1-périodique; en outre, elle permet d'écrire

$$c_n(F) = \int_0^1 F(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_k^{k+1} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(n).$$

La famille $(c_n(F))_{n\in\mathbf{Z}}$ étant supposée sommable, nous pouvons appliquer le lemme précédent : pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(F)e^{2i\pi nx},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\,\pi nx}.$$

Il reste à évaluer les deux membres en 0 pour obtenir l'identité souhaitée :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

□

Corollaire 16 (Équation fonctionnelle de la fonction thêta) — *Posons, pour tout $t\in\mathbf{R}_{>0}$,*

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

On a, pour tout $t>0$,

$$\vartheta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\vartheta(t).$$

Démonstration. Étant donné $t>0$, la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 t}e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi y^2}e^{2i\pi y\frac{\xi}{\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi\frac{\xi^2}{t}}$$

en vertu du lemme 14. La famille des $\widehat{f}(n)$ est manifestement sommable et la série des $f(x+n)$ converge normalement sur $[0,1]$ puisque

$$|f(x+n)| = e^{-\pi(x+n)^2} \leqslant e^{-\pi(n^2-2n)} = \mathrm{o}\left(e^{-\pi\frac{n^2}{2}}\right)$$

sur ce segment. Nous pouvons donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f, ce qui conduit à l'identité

$$\vartheta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

Théorème 17 — *Soit* Λ *la fonction définie sur le demi-plan* $\{s \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > 1\}$ *par*

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ *ayant pour uniques singularités des pôles simples en* 0 *et* 1*, de résidus respectifs* -1 *et* 1*. En outre, ce prolongement satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$\forall s \in \mathbf{C}, \quad \Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$,

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{s}{2}}n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 u}u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

La domination

$$\sum_{n\geqslant 1} e^{-n\pi^2 u} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n u} = \frac{e^{-\pi u}}{1-e^{-\pi u}} = \frac{1}{e^{\pi u}-1}$$

permet d'appliquer le convergence dominée et d'écrire

$$\Lambda(s) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{1}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)u^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Dans le membre de droite, l'intégrale sur $[1,+\infty[$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout en entier : c'est une application du théorème d'holomorphie sous l'intégrale, en utilisant la domination

$$|\vartheta(u)-1|\cdot|u^{\frac{s}{2}-1}| \leqslant \frac{u^{\frac{\mathfrak{Re}(s)}{2}-1}}{e^{\pi u}-1} = \mathrm{O}\left(e^{-\pi\frac{u}{2}}\right)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$. L'intégrale sur $[0,1]$ est plus problématique : on a $\vartheta(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$ au voisinage de 0 puisque

$$\vartheta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\vartheta\left(\frac{1}{u}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}$$

en vertu de l'équation fonctionnelle, donc l'intégrabilité en 0 ne vaut que si $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ permet cependant de réécrire cette intégrale sous la forme

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\vartheta\left(\frac{1}{t}\right)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}\vartheta(t)-1\right)t^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)u^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(u^{\frac{1-s}{2}}-u^{-\frac{s}{2}}\right)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)u^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale obtenue définit de nouveau une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. Nous avons ainsi obtenu l'identité

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}(\vartheta(u)-1)\left(u^{\frac{s}{2}}+u^{\frac{1-s}{2}}\right)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Le membre de droite est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les seules singularités sont deux pôles simples en 0 et 1, de résidus respectifs -1 et 1, et qui est invariante par l'involution $s \mapsto 1-s$. □

L'équation fonctionnelle

$$\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

peut se aisément se réécrire de façon à relier $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. En écrivant $\frac{1-s}{2} = 1 - \frac{s+1}{2}$, la formule des compléments et la formule de duplication conduisent à

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\sqrt{\pi}2^{1-s}\Gamma(s)} \\ &= \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)},\end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\sin\left(\frac{\pi(s+1)}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

et

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

pour tout $s \in \mathbf{C}$.

Corollaire 18 — *Pour tout entier* $n \geqslant 1$,

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}.$$

Démonstration. L'équation fonctionnelle fournit l'identité

$$\zeta(1-2n) = 2^{1-2n}\pi^{-2n}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\Gamma(2n)\zeta(2n) = (-1)^{n+1}2^{1-2n}\pi^{-2n}(2n-1)!\zeta(2n).$$

On connaît par ailleurs les valeurs de zêta aux entiers négatifs :

$$\zeta(-k) = (-1)^{k+1}\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$, donc

$$\zeta(1-2n) = \frac{B_{2n}}{2n}.$$

La formule

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}(-1)^{n+1}B_{2n}$$

en découle immédiatement. □

Corollaire 19 — *La fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur* $\mathbf{C}$ *dont l'unique singularité est un pôle simple en* 1*, de résidu* 1*. Elle s'annule en tous les entiers pairs strictement négatifs (les zéros* triviaux*). Ses autres zéros sont tous contenus dans la bande verticale* $\{s \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathfrak{Re}(s) < 1\}$ *et ils sont globalement préservés par les transformations* $s \mapsto 1-s$ *et* $s \mapsto \bar{s}$.

Démonstration. Le prolongement méromorphe de Λ et de Γ sur $\mathbf{C}$ donnent évidemment naissance à un prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbf{C}$:

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}\Lambda(s).$$

Le membre de droite est holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$, et même sur $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque $\Lambda(s) = -\frac{1}{s} + \mathrm{O}(1)$ et $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} = \frac{s}{2} + \mathrm{O}(s^2)$ au voisinage de $s = 0$. admet un pôle simple en 0 tandis que Γ s'annule simplement en ce point. En outre, que l'holomorphie de Λ sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$ force la fonction zêta à s'annuler en tout entier strictement négatif pair afin de compenser les pôles du facteur $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

Pour aller plus loin, observons que la fonction zêta ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 1$ en vertu de l'identité

$$\zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

sur ce demi-plan (rappelons qu'il s'agit d'une reformulation de l'identité de convolution $\delta_1 = 1 * \mu$). Comme la fonction Γ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$, on en déduit que

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

ne s'annule pas davantage pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, et donc également pour $\mathfrak{Re}(s) < 0$ en vertu de l'équation fonctionnelle. On en déduit que chaque entier strictement négatif pair est un zéro *simple* de ζ (ce serait sinon un zéro de Λ), et que ζ ne s'annule nulle part ailleurs sur le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) < 0$. Comme Γ ne s'annule pas, les zéros non triviaux de ζ, c'est-à-dire de partie réelle dans $[0,1]$, sont précis'ement les zéros de Λ ; il sont donc invariants par la transformation $s \mapsto 1-s$ (symétrie de centre $\frac{1}{2}$). On a par ailleurs

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

pour tout $s \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$ puisque les fonctions ζ et $s \mapsto \overline{\zeta(\bar{s})}$ sont holomorphes sur cet ouvert connexe et coïncident sur l'intervalle réel $]1,+\infty[$, qui contient des points d'accumulations. On en déduit immédiatement que l'ensemble des zéros de ζ est stable par conjugaison complexe. Tout zéro non trivial $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ de ζ dans la bande critique $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$ vient donc accompagnés des zéros $\overline{s_0}, 1-s_0$ et $1-\overline{s_0}$ (la réflexion par rapport à la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$. □

Bibliographie

[1] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, 1979.

[2] Marc HINDRY. *Arithmétique.* Calvage & Mounet.

[3] Michel TENENBAUM, Gérald et MENDÈS-FRANCE. *Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos.* Dunod, 2014.

Table des matières

1. COMPTER LES NOMBRES PREMIERS 1
1.1. Euclide 1
1.2. Euler 2
1.3. Tchébychev 6

2. FONCTIONS ARITHMÉTIQUES 11
2.1. Convolution de Dirichlet 12
2.2. La fonction de Möbius 14
2.3. La fonction indicatrice d'Euler 15

3. SÉRIES DE DIRICHLET 16
3.1. Abscisses de convergence 16
3.2. Lien avec la fonction sommatoire 19
3.3. Les séries de Dirichlet des fonctions arithmétiques 22

4. LES NOMBRES PREMIERS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE : LE THÉORÈME DE DIRICHLET 26
4.1. Caractères de Dirichlet 26
4.2. Fonctions L de Dirichlet 27
4.3. Démonstration du théorème de la progression arithmétique 28
4.4. Annexe : Analyse harmonique sur un groupe abélien fini 31

5. LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN 33
5.1. La fonction Gamma d'Euler 33
5.2. Prolongement de la fonction zêta : première méthode 39
5.3. Prolongement de la fonction zêta : deuxième méthode 42

BIBLIOGRAPHIE 47