Corrigé du contrôle partiel du 9 novembre

Exercice 1 — Désignons par $\mathscr{P}$ le sous-ensemble de $\mathbf{N}^*$ formé des nombres premiers et notons $\mathbf{1}_{\mathscr{P}}$ sa fonction indicatrice. Pour tout $x \geqslant 2$,

$$\log P(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p = \sum_{1<n\leqslant x} \mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n) \log n,$$

donc

$$\log P(x) = \pi(x) \log x - \int_1^x \pi(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

(formule sommatoire d'Abel). On dispose de l'estimation

$$\pi(t) = \mathrm{o}(t),$$

qui se déduit de la formule du produit d'Euler (cf. TD1, Exercice 3) ou, de façon un peu moins élémentaire, de l'estimation de Chébyshev $\pi(t) = \mathrm{O}\left(\frac{t}{\log t}\right)$. On en déduit

$$\log P(x) = \pi(x) \log(x) + \mathrm{o}(x),$$

d'où

$$\frac{1}{x} \log P(x) = \pi(x) \cdot \frac{\log x}{x} + \mathrm{o}(1),$$

ce qui met en évidence l'équivalence des conditions

$$\lim P(x)^{1/x} = e \ \text{ et } \ \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 — 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $\mathrm{Div}(n)$.

Si m, n sont deux entiers premiers entre eux, alors l'application

$$f : \mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n) \to \mathrm{Div}(mn), \quad (d, d') \mapsto dd'$$

est une bijection, de bijection réciproque $\delta \mapsto (\mathrm{pgcd}(\delta, m), \mathrm{pgcd}(\delta, n))$ (cela a été vu en cours). Notons que, pour tout diviseur premier p de m (resp. de n),

$$v_p(dd') = v_p(d) \quad \big(\text{resp. } v_p(dd') = v_p(d')\big).$$

Considérons maintenant $a, b \in \mathrm{Div}(mn)$, écrits sous la forme $a = \alpha\alpha'$ et $b = \beta\beta'$ avec $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta') \in \mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n)$. La condition $\mathrm{ppcm}(a, b) = mn$ équivaut à

$$\max\{v_p(a), v_p(b)\} = v_p(m) + v_p(n)$$

pour tout diviseur premier p de mn, c'est-à-dire à

$$\max\{v_p(\alpha), v_p(\beta)\} = v_p(m) \tag{1}$$

pour tout diviseur premier p de m et

$$\max\{v_p(\alpha'), v_p(\beta')\} = v_p(n) \tag{2}$$

pour tout diviseur premier p de n. La condition (1) (resp. (2)) est équivalente à $\operatorname{ppcm}(\alpha,\beta) = m$ (resp. $\operatorname{ppcm}(\alpha',\beta') = n$), donc l'application $f \times f$ réalise une bijection entre l'ensemble des quadruplets $(\alpha,\beta,\alpha',\beta') \in (\operatorname{Div}(m) \times \operatorname{Div}(n))^2$ tels que

$$\operatorname{ppcm}(\alpha,\beta) = m \;\text{ et }\; \operatorname{ppcm}(\alpha',\beta') = n$$

et l'ensemble des couples $(a,b) \in \operatorname{Div}(mn)^2$ tels que $\operatorname{ppcm}(a,b) = mn$. En passant aux cardinaux, il vient

$$c(mn) = c(m)c(n),$$

ce qui établit la multiplicativité de la fonction c.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par multiplicativité de la fonction $n \mapsto c(n)n^{-\varepsilon}$, il suffit de démontrer que $c(n)n^{-\varepsilon}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini dans l'ensemble $\mathscr{P}'$ des entiers de la forme p^m avec p premier et $m \geqslant 1$.

   Pour p premier, les couples (a,b) de diviseurs de p^m tels que $\operatorname{ppcm}(a,b) = p^m$ sont les suivants :
$$(p^m,1),\ldots,(p^m,p^m),(p^{m-1},p^m),\ldots,(1,p^m),$$
   donc $c(p^m) = 2m+1$. En utilisant la majoration $2m+1 \leqslant p^{\varepsilon m/2}$, valable pour tous p et m sauf un nombre fini d'exceptions [1], on en déduit
$$c(p^m)p^{-\varepsilon m} \leqslant \left(p^m\right)^{-\varepsilon/2},$$
   ce qui montre que le membre de gauche tend vers 0 quand p^m tend vers $+\infty$.

3. Nous pouvons écrire de manière évidente
$$f(s) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(m,n)^s} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{c(n)}{n^s}.$$
   Cette série diverge en $s = 1$ car $c(n) \geqslant 1$ pour tout n. Elle converge par contre en tout nombre réel $s > 1$: en écrivant $s = 1+2\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, il vient
$$\frac{c(n)}{n^s} = \frac{c(n)n^{-\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$
   d'après la question précédente, ce qui établit la convergence annoncée. L'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $f(s)$ est donc égale à 1.

4. Par multiplicativité de c,
$$f(s) = \prod_p D_{c,p}(s),$$
   où, pour tout nombre premier p,
$$D_{c,p}(s) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{c(p^m)}{p^{ms}} = \sum_{m\geqslant 0} \frac{2m+1}{p^{ms}}.$$
   En utilisant les identités
$$\sum_{m\geqslant 0} x^m = \frac{1}{1-x} \;\text{ et }\; \sum_{m\geqslant 0} mx^m = \frac{x}{(1-x)^2},$$
   il vient
$$D_{c,p}(s) = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} + \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3},$$

1. On a $m \leqslant 2^m \leqslant p^{\varepsilon m/2}$, pour tout m, si $p \geqslant 2^{2/\varepsilon}$ et $m \leqslant \left(2^{\varepsilon/2}\right)^m \leqslant p^{\varepsilon m/2}$, pour tout p, si $m \geqslant m(\varepsilon)$.

donc
$$f(s) = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \prod_p (1-p^{-s})^{-3}(1-p^{-2s}).$$
Il découle alors de la formule du produit pour la fonction ζ que l'on a :
$$f(s) = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}.$$

Exercice 3 — 1. La formule sommatoire d'Abel s'écrit ici
$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)\log n = M(x)\log x - \int_1^x M(t)\frac{\mathrm{d}\, t}{t}.$$
En utilisant l'estimation grossière
$$|M(x)| \leqslant \sum_{n\leqslant x} 1 \leqslant x$$
provenant de la majoration $|\mu(n)| \leqslant 1$, on en déduit
$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)\log(n) = M(x)\log(x) + \mathrm{O}(x).$$

2. (i) Les fonctions μ et 1 sont des inverses de convolution, donc l'identité $\Lambda = \log * \mu$ est équivalente à $\log = \Lambda * 1$. Cette dernière identité (vue en TD) est vraie : pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$(\Lambda * 1)(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p^a|n} \log p = \sum_p v_p(n)\log p = \log n$$
puisque $n = \prod_p p^{v_p(n)}$ (théorème fondamental de l'arithmétique).

(ii) Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned}\left[(f*g)\cdot\log\right](n) &= \sum_{ab=n} f(a)g(b)\log(n)\\ &= \sum_{ab=n} f(a)g(b)(\log a + \log b)\\ &= \sum_{ab=n} f(a)\log(a)g(b) + \sum_{ab=n} f(a)g(b)\log(b)\\ &= \left[(f\cdot\log)*g + f*(g\cdot\log)\right](n).\end{aligned}$$

(iii) Partons de l'identité évidente $\delta\cdot\log = 0$. En écrivant $\delta = 1*\mu$ et en appliquant la question (ii), on en déduit
$$0 = \log*\mu + 1*(\mu\cdot\log), \quad \text{soit} \quad 1*(\mu\cdot\log) = -\log*\mu = -\Lambda,$$
puis
$$\mu\cdot\log = \delta*(\mu\cdot\log) = (\mu*1)*\mu\cdot\log = -\mu*\Lambda.$$
En ajoutant membre à membre l'identité $0 = \mu*1-\delta$, on obtient finalement
$$\mu\cdot\log = -\mu*(\Lambda-1)-\delta.$$

3. On sait que le théorème des nombres premiers est équivalent à l'estimation asymptotique $\psi(x) \sim x \sim \lfloor x \rfloor$ quand x tend vers $+\infty$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe donc $A(\varepsilon) \geqslant 1$ tel que
$$\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right| \leqslant \varepsilon\frac{x}{a}$$
pour tout entier a tel que $a \leqslant \frac{x}{A(\varepsilon)}$. On a par ailleurs $\psi(x) = \mathrm{O}(x)$ en vertu du théorème de Chébyshev, donc il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\psi\left(\frac{x}{a}\right) \leqslant C\frac{x}{a}$$
pour tout entier a entre 1 et x. Ceci conduit aux majorations :
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{a\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right| &\leqslant \sum_{a\leqslant\frac{x}{A(\varepsilon)}}\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right| + \sum_{\frac{x}{A(\varepsilon)}\leqslant a\leqslant x}\left|\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right| \\
&\leqslant \varepsilon x\sum_{a\leqslant\frac{x}{A(\varepsilon)}}\frac{1}{a} + (C+1)x\sum_{\frac{x}{A(\varepsilon)}<a\leqslant x}\frac{1}{a} \\
&\leqslant \varepsilon x\log x + (C+1)x\left(\log x - \log\frac{x}{A(\varepsilon)} + \mathrm{O}_\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&\leqslant \varepsilon x\log x + (C+1)x\log A(\varepsilon) + \mathrm{O}_\varepsilon(1) \\
&\leqslant 2\varepsilon x\log x
\end{aligned}$$
pour tout x suffisamment grand, ce qu'il fallait démontrer.

4. En utilisant la question 2.(iii), nous pouvons écrire
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\log n = -\sum_{n\leqslant x}\big((\mu*(\Lambda-1))(n) - \delta_1(n)\big) = -\sum_{ab\leqslant x}\mu(a)(\Lambda(b)-1) - 1$$
donc
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\log n = -1 - \sum_{a\leqslant x}\mu(a)\sum_{b\leqslant\frac{x}{a}}(\Lambda(b)-1)$$
On a
$$\sum_{b\leqslant\frac{x}{a}}(\Lambda(b)-1) = \sum_{b\leqslant\frac{x}{a}}\Lambda(b) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = \psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor$$
par définition de la fonction ψ, donc
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\log n = -1 - \sum_{a\leqslant x}\mu(a)\left(\psi\left(\frac{x}{a}\right) - \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor\right).$$
Fixons $\varepsilon > 0$. En utilisant la majoration $|\mu(a)| \leqslant 1$ et la question 3, on observe que le membre de droite est majoré par $1 + 2\varepsilon x\log x$ pour tout x assez grand. En divisant par $x\log x$ et en utilisant la question 1 pour estimer le membre de gauche, on en déduit
$$\frac{M(x)}{x} \leqslant 3\varepsilon$$
pour tout x assez grand. C'est ce qu'il fallait démontrer.

5. On a
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m\leqslant\frac{x}{n}}1 = \sum_{mn\leqslant x}\mu(n) = \sum_{a\leqslant x}\sum_{n|a}\mu(n) = 1$$
car $\sum_{n|a}\mu(n) = \delta_1(a)$ pour tout entier $a \geqslant 1$. En écrivant $\lfloor t\rfloor = t + \mathrm{O}(1)$, on en déduit
$$1 = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\frac{x}{n} + \mathrm{O}\left(\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\right) = x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} + \mathrm{O}(M(x)).$$
La conclusion découle alors de la question précédente :
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1) = \mathrm{o}(1).$$