1. Compter les nombres premiers

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et par $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des éléments de $\mathscr{P}$.

Exercice 1 — En reprenant la démonstration d'Euclide de l'infinitude de $\mathscr{P}$, établir les estimations suivantes :

(i) $p_n < 2^{2^{n-1}}$

(ii) $\pi(x) > \log\log(x)$.

Exercice 2 — Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ quand x tend vers $+\infty$;

(ii) $p_n \sim n\log n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 — 1. Démontrer que l'on a

$$\lim_{x\to+\infty} \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 0.$$

2. Soit $x > p_n$. Démontrer que l'on a

$$\mathrm{Card}\{p\in\mathscr{P} \mid p_n < p \leqslant x\} \leqslant [x] - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \ldots + (-1)^n\left[\frac{x}{p_1\cdots p_n}\right].$$

3. En déduire la majoration

$$\pi(x) \leqslant n + 2^n + x\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

puis

$$\pi(x) = o(x).$$

4. Plus généralement, établir l'estimation

$$\mathrm{Card}\ \{p^\alpha \mid p\in\mathscr{P}, \alpha\geqslant 1 \text{ et } p^\alpha \leqslant x\} = o(x).$$

(*Indication : exprimer le membre de gauche à l'aide de la fonction* π.)

Exercice 4 — Pour tous entiers $0\leqslant k\leqslant n$, établir la majoration

$$\binom{n}{k} \leqslant n^{\pi(n)}.$$

(Indication : majorer les différentes valuations p-adiques du coefficient binomial en exploitant les techniques de la démonstration du théorème de Tchébychev.)

Exercice 5 — 1. En considérant les coefficients binomiaux $\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n+1}{n}$, prouver que l'on a

$$\prod_{n<p\leqslant 2n} p \leqslant 4^n \quad \text{et} \quad \prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p \leqslant 4^n.$$

2. En déduire la majoration

$$\prod_{p\leqslant x} p \leqslant 4^x,$$

c'est-à-dire

$$\theta(x) \leqslant (2\log 2)x,$$

pour tout nombre réel $x > 0$.

Exercice 6 (Le postulat de Bertrand) — Le mathématicien français Joseph Bertrand a conjecturé en 1845 que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intervalle $[n, 2n]$ contient un nombre premier. Tchebychev en a donné la première démonstration en 1850.

1. Déduire le postulat de Bertrand de l'encadrement

$$0{,}92\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1{,}11\frac{x}{\log x}$$

établi par Tchebychev.

La preuve qui suit est due à Paul Erdős (en 1932).

2. Prouver que l'on a, pour tout p premier et tout $n \geqslant 1$:

$$v_p\binom{2n}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n < p \leqslant 2n \\ 0 & \text{si} \quad \frac{2}{3}n < p \leqslant n \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{si} \quad \sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n. \end{cases}$$

3. Établir l'encadrement

$$\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{2n/3} \cdot \prod_{n<p\leqslant 2n} p.$$

(Indication : utiliser l'exercice précédent).

4. En déduire le postulat de Bertrand.

Exercice 7 (Théorème de Mertens faible) — Rappelons l'identité

$$\log(n!) = \sum_{p\leqslant n}\sum_{\alpha\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\log p$$

et l'estimation asymptotique

$$\log(n!) = n\log n - n + \mathrm{O}(\log n)$$

(formule de Stirling faible).

1. Justifier que l'on a

$$\sum_{p\leqslant n}\sum_{\alpha\geqslant 2}\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\log p = \mathrm{O}(n).$$

2. En déduire l'estimation asymptotique

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{\log p}{p} = \log n + \mathrm{O}(1).$$