2. Fonctions arithmétiques

Exercice 1 — Démontrer que l'anneau $(\mathscr{A},+,*)$ est intègre.

Exercice 2 (Seconde formule d'inversion de Möbius) — 1. Soit F, G deux fonctions complexes définies sur $[1,+\infty[$. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \geqslant 1, \quad F(x) = \sum_{n\leqslant x} G(x/n)$

(ii) $\forall x \geqslant 1, \quad G(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n) F(x/n)$.

2. En déduire l'identité
$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$
pour tout $x \geqslant 1$.

Exercice 3 — Soit $f \in \mathscr{A}$ une fonction multiplicative. Soit $\mathscr{P}'$ le sous-ensemble de $\mathbf{N}^*$ formé des entiers de la forme p^α, avec p premier et $\alpha \geqslant 1$.

Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(m)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$ dans $\mathscr{P}'$;

(ii) $f(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ dans $\mathbf{N}^*$.

Exercice 4 (Comportement asymptotique de la fonction « nombre de diviseurs ») — On rappelle que la fonction « nombre de diviseurs » est définie par
$$d(n) = \sum_{d\mid n} 1$$
pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On a vu que la multiplicatitivité de d découle de l'identité $d = 1*1$. En donner une preuve directe.
2. Démontrer que l'on a
$$\liminf_{n\to+\infty} d(n) = 2.$$
3. Démontrer que l'on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{d(n)}{(\log n)^k} = +\infty$$
pour tout entier $k \geqslant 1$.

   Indication : calculer $d(2^a), d((2\cdot 3)^a), \ldots$
4. Démontrer que l'on a
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{d(n)}{n^\varepsilon} = 0$$
pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 5 (La méthode de l'hyperbole de Dirichlet) — 1. Vérifier que $\sum_{n\leqslant x} d(n)$ est le nombre de points sous l'hyperbole d'équation $uv = x$ à coordonnées dans $\mathbf{N}^*$. En déduire l'estimation
$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x + \mathrm{O}(x).$$

2. En considérant les bandes $u \leqslant \sqrt{x}$ et $v \leqslant \sqrt{x}$, établir l'estimation raffinée suivante :

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \log x + 2(\gamma - 1)x + \mathrm{O}(\sqrt{x}),$$

où γ désigne la constante d'Euler.

3. Soit f, g deux fonctions arithmétiques, de fonctions sommatoires respectives F, G. En généralisant la méthode de la question précédente, démontrer que l'on a

$$\sum_{n \leqslant x} f * g(n) = \sum_{n \leqslant y} g(n) F(x/n) + \sum_{m \leqslant x/y} f(m) G(x/m) - F(x/y)G(y).$$

pour tous réels $0 < y \leqslant x$.

Exercice 6 — Pour tout $s > 1$, démontrer l'identité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Exercice 7 (Comportement asymptotique de la fonction d'Euler) — 1. Démontrer que l'on a

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 1.$$

2. Démontrer que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{1-\varepsilon}} = +\infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

3. En exploitant l'identité $\varphi = \mu * \mathrm{id}$, établir que l'on a

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + \mathrm{O}(x \log x).$$

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, considérons tous les couples (p, q) d'entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Démontrer que la proportion de couples d'entiers premiers entre eux tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (Le théorème de Mertens faible (bis)) — On rappelle que le théorème de Tchébychev fournit l'estimation

$$\sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) = \psi(x) = \mathrm{O}(x).$$

1. Vérifier l'identité $\log = \Lambda * 1$ et en déduire

$$\sum_{n \leqslant x} \log n = x \sum_{d \leqslant x} \frac{\Lambda(d)}{d} + \mathrm{O}(x).$$

2. En déduire l'estimation asymptotique

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + \mathrm{O}(1).$$