M1 Mathématiques générales et applications, 2022-23 — Introduction à la théorie analytique des nombres
Université Lyon 1

3. Séries de Dirichlet

Exercice 1 (Transformation d'Abel) — Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres complexes. On pose $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ pour $N \geqslant 0$ et $A_{-1} = 0$.

1. Pour tous $0 \leqslant M \leqslant N$, démontrer l'identité
$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = \sum_{n=M-1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1}.$$

2. En déduire le *théorème d'Abel* si :
   (i) les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont bornées (ce qui est en particulier le cas si cette série converge) ;
   (ii) la suite (b_n) est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0,

   alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Exercice 2 (Formule sommatoire d'Abel) — Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes et soit $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $x > 0$, on pose
$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n.$$

1. Démontrer l'identité
$$\sum_{y<n\leqslant x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
   pour tous nombres réels $0 < y \leqslant x$.

2. En déduire la *formule sommatoire d'Euler* :
$$\sum_{y<n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^x (t - \lfloor t\rfloor)f'(t)\,\mathrm{d}t + (x - \lfloor x\rfloor)f(x) + (y - \lfloor y\rfloor)f(y).$$

3. En utilisant l'exercice 2.7, démontrer qu'il existe un nombre réel c tel que
$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + c + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$
   quand x tend vers $+\infty$.

4. En admettant le théorème des nombres premiers, estimer $\sum_{p\leqslant x} p$.

Exercice 3 — Considérons la série de Dirichlet
$$F(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n (\log 2n)^{-2}}{n^s}.$$

1. Démontrer que F a pour abscisse de convergence 0 et converge en tout point de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 0$.

2. Démontrer que la série de Dirichlet
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$$
diverge en tout point de l'axe $\mathfrak{Re}(s)=1$.

Exercice 4 — Soit $f\in\mathscr{A}$ une fonction arithmétique à croissance polynomiale telle que
$$D_f(s)=\prod_p D_{f,p}(s)$$
pour tout s tel que $\mathfrak{Re}(s)>\sigma_f$. Démontrer que f est multiplicative.

Exercice 5 — 1. Démontrer l'identité
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{d(n^2)}{n^s}=\frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$
pour tout s tel que $\mathfrak{Re}(s)>1$.

2. Exprimer la série de Dirichlet de la fonction d^2 à l'aide de la fonction ζ et en déduire une identité de convolution pour d^2.

Exercice 6 — 1. Démontrer l'identité
$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}\frac{1}{m^2n^2}=\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

2. Plus généralement, exprimer la somme des la série des $(m_1\cdot m_r)^{-s}$, avec $\mathrm{pgcd}(m_1,\dots,m_r)=1$, à l'aide de la fonction ζ.

Exercice 7 — 1. Démontrer qu'il existe une unique fonction arithmétique f à valeurs réelles positives telle que $f*f=1$.

2. Exprimer $D_f(s)$ en fonction de $\zeta(s)$.
3. En déduire une formule explicite pour $f(p^m)$, avec p premier et $m\in\mathbf{N}$.

Exercice 8 — 1. Exprimer $D_{\mu^2}(s)$ à l'aide de la fonction ζ. En déduire
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2=\frac{6}{\pi^2}x+\mathrm{O}(\sqrt{x}).$$

2. Étant donné $m\geqslant 1$, démontrer l'identité
$$\sum_{n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}\frac{\mu(n)}{n^2}=\prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

3. En déduire que, si a et m sont deux entiers premiers entre eux, alors
$$\sum_{n\leqslant x,\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ m)}\mu(n)^2=\frac{x}{m}\prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\mathrm{O}(\sqrt{x}).$$