TD3. SÉRIES DE DIRICHLET (CORRECTION)

Exercice 3 — 1. La série de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n (\log 2n)^{-2}}{n^s}$$

converge en $s=0$ en vertu du théorème des séries alternées, et elle diverge pour $s \in \mathbf{R}_{<0}$, puisqu'alors $|n^{-s}(\log 2n)^{-2}|$ tend vers $+\infty$ avec n ; son abscisse de convergence est donc

$$\sigma_c = 0.$$

Fixons maintenant un nombre réel $t \neq 0$ et établissons la convergence de la série en $s = it$. Nous allons l'obtenir par application de la formule sommatoire d'Abel, avec $a_n = (-1)^n n^{-it}$ et $f(x) = (\log 2x)^{-2}$: pour tous entiers $M < N$,

$$\sum_{n=M+1}^{N} a_n f(n) = A(N)(\log 2N)^{-2} - A(M)(\log 2M)^{-2} + 4\int_M^N A(x)\frac{\mathrm{d}x}{x\log(2x)^3} \tag{1}$$

en ayant posé

$$A(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n.$$

Nous pouvons estimer le comportement asymptotique de $A(x)$ en recourant de nouveau à la formule sommatoire d'Abel :

$$A(x) = -1 + \sum_{1<n\leqslant x} (-1)^n n^{-it} = E(x)x^{-it} + 1 + it\int_1^x E(y)\frac{\mathrm{d}y}{y^{1+it}},$$

avec

$$E(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} (-1)^n.$$

On en déduit immédiatement

$$A(x) = \mathrm{O}(\log x)$$

puisque

$$\left|\int_1^x E(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{y^{1+it}}\right| \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}y}{y} = \log x.$$

En revenant à l'identité (1), il vient

$$\int_M^N A(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x\log(2x)^3} = \mathrm{O}\left(\int_M^N \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2}\right) = \mathrm{o}(1)$$

et

$$A(N)(\log 2N)^{-2} = \mathrm{o}(1), \quad A(M)(\log 2M)^{-2} = \mathrm{o}(1),$$

donc

$$\left|\sum_{n=M}^{N} a_n f(n)\right| = \mathrm{o}(1).$$

La convergence de la série de Dirichlet en $s = it$ en découle par application du critère de Cauchy.

2. L'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

est égale à 1.

Fixons $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. En appliquant la formule sommatoire d'Euler, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+it}} &= \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+it}} + (1+it)\int_1^N (x - \lfloor x \rfloor)\frac{\mathrm{d}x}{x^{2+it}} \\ &= \frac{i}{t}\left(N^{-it} - 1\right) + (1+it)\int_1^N (x - [x])\frac{\mathrm{d}x}{x^{2+it}}\end{aligned}$$

pour tout entier $N \geqslant 1$. L'intégrale dans le membre de droite est absolument convergente tandis que la suite $(N^{-it})_{N\geqslant 1}$ diverge, donc le membre de gauche diverge.

Exercice 5 — 2. Tout comme d, la fonction arithmétique $n \mapsto d(n)^2$ est à croissance polynomiale et multiplicative, donc

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)^2}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{m\geqslant 0} \frac{d(p^m)^2}{p^{ms}} \right)$$

pour tout nombre complexe s de partie réelle suffisamment grande. Comme $d(p^m) = m+1$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant 0} \frac{d(p^m)^2}{p^{ms}} &= \sum_{m\geqslant 0} \frac{m(m+1)+(m+1)}{p^{ms}} \\ &= \frac{2p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} + \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \\ &= \frac{1-p^{-s}+2p^{-s}}{(1-p^{-s})^3} \\ &= \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^3} \\ &= \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^4}\end{aligned}$$

en vertu des identités

$$\sum_{m\geqslant 0} m(m+1)x^m = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{m\geqslant 0} (m+1)x^m = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Nous avons obtenu

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}$$

et donc

$$d^2 = f * 1 * 1 * 1 * 1,$$

où f est la fonction arithmétique de série de Dirichlet $\zeta(2s)^{-1}$, c'est-à-dire la fonction arithmétique multiplicative définie par

$$f(p^a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{si } a = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque — On a

$$(1*1*1*1*1)(n) = \sum_{af=n} (1*1*1)(f) = \sum_{af=n, be=f} (1*1)(e) = \sum_{abe=n,\ cd=e} 1 = \sum_{abcd=n} 1$$

pour tout entier $n \geqslant 1$, donc $(1*1*1*1)(n)$ est le nombre de quadruplets (a,b,c,d) d'entiers tels que $abcd = n$; pour cette raison, on pose habituellement $1*1*1*1 = d_4$. L'inverse de convolution de f est la fonction arithmétique de série de Dirichlet $\zeta(2s)$, c'est-à-dire la fonction caractéristique du sous-ensemble C des carrés dans $\mathbf{N}^*$. L'identité de convolution précédente s'écrit donc également sous la forme équivalente :

$$d_4 = \mathbf{1}_C * d^2.$$

Exercice 6 — 1. L'idée est d'écrire

$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\delta_1(\mathrm{pgcd}(m,n))}{m^2n^2}$$

et d'utiliser l'identité

$$\sum_{d|k} \mu(d) = \delta_1(k).$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{m,n\geqslant 1} \sum_{d|m,n} \frac{\mu(d)}{m^2n^2}.$$

Les conditions $d|m$ et $d|n$ équivalent à l'écriture $m = da$ et $n = db$ avec $a, b \in \mathbf{N}^*$, donc

$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{d,a,b\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^4a^2b^2} = \left(\sum_{d\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^4}\right)\cdot\left(\sum_{a\geqslant 1} \frac{1}{a^2}\right)\cdot\left(\sum_{b\geqslant 1} \frac{1}{b^2}\right).$$

En se souvenant que la série de Dirichlet de la fonction de Möbius est ζ^{-1}, nous obtenons finalement

$$\sum_{m,n\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1} \frac{1}{m^2n^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

2. La généralisation est immédiate : pour tout $r \geqslant 1$,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r\geqslant 1,\ \mathrm{pgcd}(m_1,\ldots,m_r)=1} \frac{1}{m_1^2\cdots m_r^2} = \sum_{d\geqslant 1, a_1,\ldots,a_r\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^{2r}a_1^2\cdots a_r^2} = \left(\sum_{d\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^{2r}}\right)\left(\sum_{a\geqslant 1} \frac{1}{a^2}\right)^r = \frac{\zeta(2)^r}{\zeta(2r)}.$$

Exercice 7 — 1. Résoudre l'équation de convolution $f * f = 1$ dans l'anneau $\mathscr{A}$ des fonctions arithmétiques équivaut à résoudre le système d'équations

$$f(n)f(1) + \sum_{d|n,\ d<n} f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = 1$$

avec $n \in \mathbf{N}^*$. On a $f(1)^2 = 1$ pour $n = 1$, donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$; une fois la valeur de $f(1)$ fixée, on détermine de manière unique $f(n)$ pour $n \geqslant 2$ en raisonnant par récurrence. Il existe donc une unique fonction arithmétique f à valeurs positives telle que $f * f = 1$, et celle-ci vérifie $f(1) = 1$.

2. L'équation de convolution se reformule de manière équivalente sous la forme

$$D_f(s)^2 = D_1(s) = \zeta(s)$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_f$.

3. Rappelons que l'on pose usuellement

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}$$

pour tout nombre complexe α et tout entier $n \in \mathbf{N}$. La série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n$$

converge pour $|z| < 1$ et sa somme $S(z)$ vérifie l'identité

$$S(z)^2 = \frac{1}{1-z}$$

sur le disque de convergence. On en déduit que la série

$$\sum_{m\geqslant 0} (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} p^{-ms}$$

converge normalement sur tout demi-plan fermé contenu dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s) > 0$, et que sa somme $S_p(s)$ vérifie

$$S_p(s)^2 = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Cela nous amène à considérer la fonction arithmétique multiplicative g définie par

$$g(p^m) = (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+m-1\right)}{m!} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdots 1}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

pour tout nombre premier p et tout entier $m \in \mathbf{N}$. On a $g(p^m) \sim \sqrt{\pi m}$ par application de la formule de Stirling. Comme $m \leqslant p^m$ pour tout $m \geqslant 0$, il vient

$$g(p^m) = \mathrm{O}\left((p^m)^{\frac{1}{2}}\right)$$

quand p^m tend vers $+\infty$. Par multiplicativité, on en déduit que g est à croissance polynomiale (TD2, exercice 3) :

$$g(n) = \mathrm{O}(n^{\frac{1}{2}}).$$

La fonction sommatoire M_g de g vérifie alors

$$M_g(x) = \mathrm{O}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

, donc $\sigma_g \leqslant \frac{3}{2}$ et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{m\geqslant 0} \frac{g(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p S_p(s)^2 = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

pour tout nombre complexe s tel que $\mathfrak{Re}(s) > \sigma_g$. Nous en déduisons l'identité de convolution

$$g * g = 1,$$

puis finalement $g = f$ en vertu de la question 1 et du fait que g est, par définition, à valeurs positives.

Nous avons donc

$$f(p^m) = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

pour tout nombre premier p et tout $m \in \mathbf{N}$.

Exercice 8 — 1. La fonction μ^2 est multiplicative, donc

$$D_{\mu^2}(s) = \prod_p \left(\sum_{m\geqslant 0} \frac{\mu(p^m)^2}{p^{ms}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Nous pouvons donc écrire $\mu^2 = 1 * f$, où f désigne la fonction arithmétique de série de Dirichlet

$$\zeta(2s)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

c'est-à-dire la fonction multiplicative telle que

$$f(p^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ -1 & \text{si } m = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \\ \mu(m) & \text{si } n = m^2 \end{cases}$$

puis

$$\mu(n)^2 = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{\substack{c,d\geqslant 1\\ cd^2=n}} \mu(d)$$

et

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)^2 = \sum_{\substack{c,d\geqslant 1\\ cd^2\leqslant x}} \mu(d) = \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \mu(d)\left(\sum_{c\leqslant\frac{x}{d^2}} 1\right) = \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \mu(d)\left\lfloor\frac{x}{d^2}\right\rfloor.$$

En écrivant comme d'habitude

$$\left\lfloor\frac{x}{d^2}\right\rfloor = \frac{x}{d^2} + \mathrm{O}(1)$$

et en observant que l'on a

$$\left|\sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \mu(d)\right| \leqslant \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} 1 \leqslant \sqrt{x},$$

on obtient

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)^2 = x\sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{O}(\sqrt{x}).$$

On conclut en écrivant

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}$$

et

$$\left|\sum_{d>\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leqslant \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{1}{d^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

par comparaison série-intégrale, puis en utilisant la formule

$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{\mu(d)}{d^2} = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Le fonction μ^2 n'est autre que la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres entiers *sans facteur carré*. L'estimation asymptotique que l'on vient d'établir s'interprète en disant que la probabilité qu'un entier pris « au hasard » soit sans facteur carré est égale à $\frac{6}{\pi^2}$.

2. On a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

En ne considérant dans le produit de droite que les nombres premiers ne divisant pas m, on obtient en développant tous les entiers n non divisibles par ces nombres premiers dans la somme de gauche, c'est-à-dire les entiers n premiers à m :

$$\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ \mathrm{pgcd}(m,n)=1}} \frac{\mu(n)}{n^2} = \prod_{p\nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

3. Fixons un entier a premier à m. Comme dans la démonstration du théorème de la progression arithmétique, écrivons

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a \pmod m}} \mu(n)^2 = \sum_{n\leqslant x} \mu(n)^2 \frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \overline{\chi(a)}\chi(n) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \overline{\chi(a)} \sum_{n\leqslant x} \mu(n)^2\chi(n), \tag{2}$$

χ parcourant l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo m.

En écrivant, comme à la question 1,

$$\mu(n)^2 = \sum_{\substack{c,d\geqslant 1\\ cd^2=n}} \mu(d),$$

il vient

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2\chi(n)=\sum_{cd^2\leqslant x}\mu(d)\chi(cd^2)=\sum_{cd^2\leqslant x}\mu(d)\chi(d)^2\chi(c)=\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\chi(d)^2\sum_{c\leqslant\frac{x}{d^2}}\chi(c). \qquad (3)$$

(i) Si le caractère χ n'est pas trivial, alors

$$\sum_{c\leqslant\frac{x}{d^2}}\chi(c)=\mathrm{O}(1)$$

(voir le cours) et donc

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2\chi(n)=\mathrm{O}\left(\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\chi(d)^2\right)=\mathrm{O}\left(\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}1\right)=\mathrm{O}(\sqrt{x})$$

puisque $|\mu(d)\chi(d)^2|\leqslant 1$ pour tout entier d.

(ii) Supposons maintenant que χ soit le caractère trivial, c'est-à-dire $\chi(d)=1$ si $\mathrm{pgcd}(d,m)=1$ et $\chi(d)=0$ sinon. La somme

$$\sum_{c\leqslant\frac{x}{d^2}}\chi(c)$$

est le nombre d'entiers premiers à m entre 1 et $\frac{x}{d^2}$.

De manière générale, pour tout nombre réel $y\geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant y,\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=1}}1=\frac{\varphi(m)}{m}y+\mathrm{O}(1).$$

En effet, en posant $\ell=\lfloor\frac{y}{m}\rfloor$, on a $\ell m\leqslant y<(\ell+1)m$ et

$$\ell\varphi(m)\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant y,\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=1}}1\leqslant(\ell+1)\varphi(m),$$

donc

$$\frac{\varphi(m)}{m}y-\varphi(m)\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant y,\\ \mathrm{pgcd}(k,m)=1}}1\leqslant\frac{\varphi(m)}{m}y+\varphi(m).$$

En revenant à (3) , nous obtenons donc pour la caractère trivial

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\mu(n)^2\chi(n) &= \sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\chi(d)^2\sum_{c\leqslant\frac{x}{d^2}}\chi(c)\\
&= \sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\chi(d)^2\left(\frac{\varphi(m)}{m}\frac{x}{d^2}+\mathrm{O}(1)\right)\\
&= \frac{\varphi(m)}{m}\left(\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}\chi(d)^2\right)x+\mathrm{O}(\sqrt{x})\\
&= \frac{\varphi(m)}{m}\left(\sum_{\substack{d\leqslant\sqrt{x}\\ \mathrm{pgcd}(d,m)=1}}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)x+\mathrm{O}(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

En vertu de la question précédente et de l'estimation classique

$$\sum_{d\geqslant y}\frac{1}{d^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

(comparaison série-intégrale), on obtient

$$\sum_{\substack{d \leqslant \sqrt{x} \\ \mathrm{pgcd}(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\substack{d \geqslant 1 \\ \mathrm{pgcd}(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{O}\left(\sum_{d \geqslant \sqrt{x}} \frac{1}{d^2}\right) = \prod_{p \nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc, toujours pour le caractère trivial,

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2 \chi(n) = \frac{\varphi(m)}{m} \prod_{p \nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) x + \mathrm{O}(\sqrt{x}).$$

Nous pouvons maintenant conclure :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a \pmod m}} \mu(n)^2 &= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2 \chi(n) \\
&= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2 \chi_0(n) + \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2 \chi(n) \\
&= \frac{x}{m} \prod_{p \nmid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + \mathrm{O}(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

en notant χ_0 le caractère trivial. Cette estimation montre que les entiers sans facteur carré sont *uniformément répartis* (asymptotiquement) dans toutes les classes de congruence inversibles modulo m.